

RATIONAMENTE DE BAZA

SEMNALUL SINUSOIDAL SI PRELUCRAREA LUI

ing. IOAN ROSCA

Scopul acestui articol este de a lamuri semnificatia unor notiuni de baza care fac obiectul unor confuzii perturbatoare. Datorita caracterului abstract pe care utilizarea impedantei complexe il imprima rationamentelor se produce o instrainare de semnificatia directa, fizica. Acest fenomen este evitabil deoarece notiunea de impedanta complexa este extrem de simpla matematic si are semnificatii fizice foarte clare.

Va propun in acest sens sa raspundeti la citeva intrebari despre notiuni cu care se opereaza curent in literatura de specialitate :

- Care este rolul semnalului sinusoidal in analiza comportarii circuitelor electrice ?
- Ce intelegeti prin frecventa unghiulara si prin faza unei sinusoide ?
- Cum reactioneaza in curent o bobina atacata de un generator de tensiune sinusoidala ?
- Ce este impedanta unui dipol ?
- Ce sens are impedanta unei diode ?
- Pot exista impedante cu valoarea 75 ohmi ?
- Ce semnificatie fizica are impedanta $3+4j$? Ce semnificatie are j in aceasta expresie ? Ce modul are aceasta impedanta ? La ce frecventa a fost masurata daca ea reprezinta inserierea unei rezistente de valoare 3 cu o inductanta de valoare 2 ?
- Ce rezulta din adunarea a doua sinusoide ? Dar daca au aceasi frecventa ?
- Ce reprezinta capacitatea "reflectata" din secundarul in primarul unui transformator ?

In cele ce urmeaza veti gasi raspunsuri la aceste intrebari

1. Marimi fizice. Semnale.

In natura se produc fenomene fizice diverse in cadrul carora variaza anumite marimi fizice. Fiind insuficienta descrierea calitativa, se introduc unitati de masura si se obtin prin masurare descrieri cantitative ale evolutiei marimilor fizice in timp

numite semnale. Semnalele sint descrise in forme diverse (tabele, grafice, denumiri).

In figura 1 sint redade citeva forme de semnal:

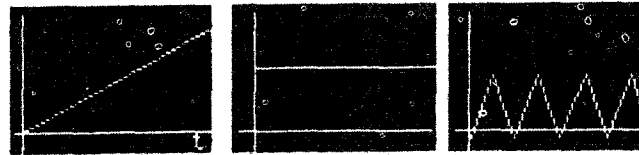
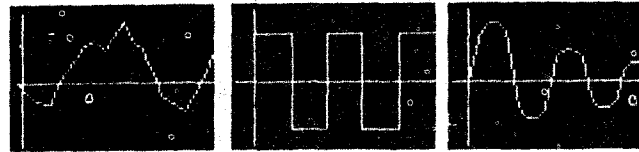


Fig. 1 - Semnale



Redarea unui semnal prin tabelul valorilor este greoaie. Descrierea sa grafica este avantajoasa si expresiva. Totusi, pentru a ne putea referi la un semnal de un anumit tip si a-l introduce in anumite "operatii", avem nevoie de o descriere simbolica (un nume dat semnalului respectiv).

2. Semnalul sinusoidal

In multe procese naturale se produc semnale de tip oscilatie. Tabelele lor de valori au o conformatie specifica, pusa mai bine in evidenta de aspectul grafic (vezi fig.2).

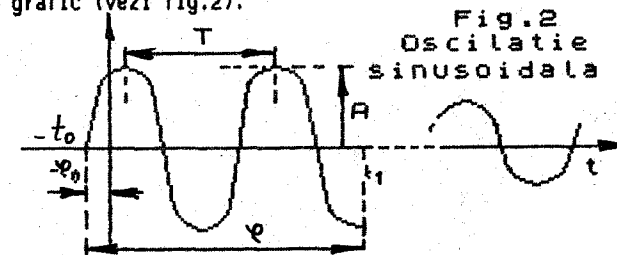
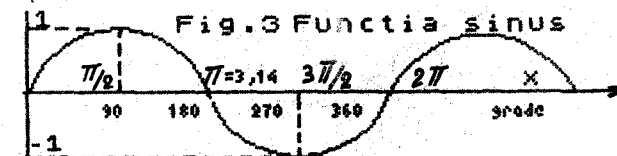


Fig. 2 Oscilatie sinusoidala

Neglijind zona de amortizare forma de semnal din figura 2 este inrudita cu o forma clasica denumita sinus care este studiata in trigonometrie (fig3)



De aceea semnalul din figura 2 este denumit

sinusoida (din familia lui sinus) avind reprezentarea simbolica :

$$(1) x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ unde :}$$

\sin = functia sinus din figura 3

A = amplitudine (de care depinde in general intensitatea efectelor produse)

T = perioada (durata unei oscilatii complete)

f = frecventa = $1 / T$

ω = frecventa unghiulara = $2\pi f = 6,28f$

φ_0 = faza initiala (pozitia atinsa pe sinus in momentul in care incepe masurarea)

φ = faza = $\omega t + \varphi_0$ = pozitia atinsa pe sinusoida la momentul t

Observatie : T, f, ω , caracterizeaza viteza de repetitie a fenomenului periodic.

3. Modificarile unei sinusoide

Daca o sursa produce o oscilatie (cauza) o inlantuire de fenomene fizice (propagare) poate provoca variatii sinusoidale ale unor alte marimi (efecte) Semnalele efecte(iesiri) au o evolutie legata de evolutia cauzei (intrare). Forma "iesirii" urmareste mai mult sau mai putin fidel forma semnalului de intrare.

In multe situatii semnalul de iesire nu mai pastreaza caracteristicile unei sinusoide de intrare (modificari de forma si frecventa). In astfel de cazuri spunem ca au avut loc transformari neliniare. Mentionam ca exemple dioda si tranzistorul care deformeaza semnalele sinusoidale.

Citeva exemple sint redade in figura 4 (reprezentind respectiv situatiile: sinusoida limitata, sinusoida perturbata de zgomot, sinusoida distorsionata, sinusoida modulata in amplitudine)

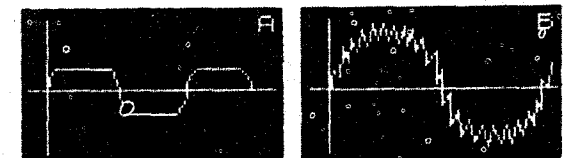
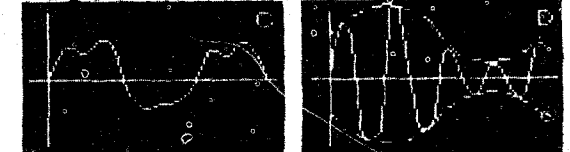


Fig. 4 Sinusoide deformate



Ne vom ocupa numai de transformările *liniare* adică acelea în care sînt modificate doar amplitudinea și faza sinusoidelor.

Referindu-ne la situația generală simbolizată în figura 5:

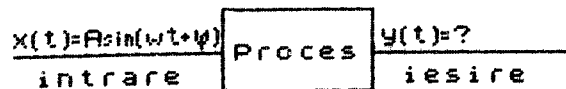


Fig. 5

vom trata cazul în care răspunsul $y(t)$ are forma :

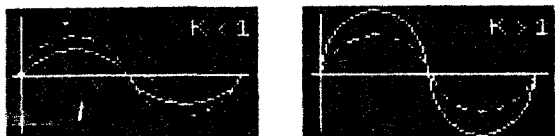
$$(2) y(t) = K \times A \sin(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$$

Asadar au suferit modificari :

amplitudinea - în raport K

faza - cu deviația $\Delta\varphi$

Figura 6 reda grafic câteva situații particulare



atenuare

amplificare

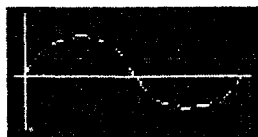
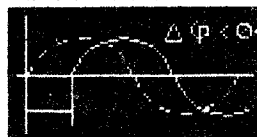
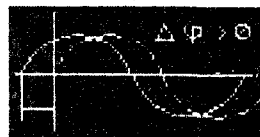


Fig. 6

în avans

întârziere



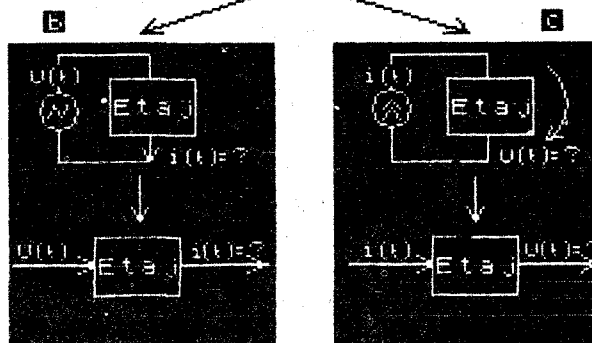
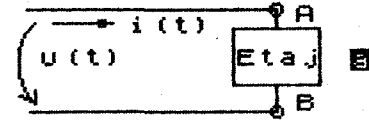
Observație : Aceste "modificări" trebuie interpretate în funcție de semnificația semnalelor de intrare și de ieșire. Astfel, putem vorbi de o amplificare numai dacă semnalele au aceeași semnificație fizică și aceeași unitate de măsură. De asemenea modificările de fază presupun raportarea la aceeași scară de timp și același etalon. Numai semnalele cu aceeași perioadă pot fi caracterizate de o anumită relație de fază (în întârziere sau avans).

4. Cazul circuitelor electrice

În cazul circuitelor electrice, mărimile fizice a căror variație poartă informația utilă sînt : sarcina, curentul și tensiunea electrică și fluxul magnetic. Evoluția măsurată a acestor mărimi (semnalele electrice) poate avea forme variate. Ne vom concentra atenția asupra formelor semnalelor fără a discuta fenomenele fizice care le generează. Din acest punct de vedere (informațional) putem vorbi de un semnal de intrare și unul de ieșire (vezi fig. 5). Etajul va furniza semnalul de ieșire conform intrării și structurii lui interioare fiind caracterizat de o anumită *lege de transformare*.

Vom considera cazul particular al semnalelor de intrare sinusoidale, analizînd reacția etajelor *liniare* la care ieșirea va fi o sinusoidă din aceeași familie cu intrarea dar cu o altă amplitudine și cu o altă fază (putem vorbi de un factor complex de transfer al semnalului sinusoidal).

Pentru început să luăm cazul unei porți electrice caracterizate printr-o anumită tensiune la borne și un anumit curent - variabile în timp -, constituind semnalele de intrare și ieșire (fig. 7).



În fig. 7b este reprezentat cazul atacului cu generator ideal de tensiune. Se presupune deci că generatorul impune tensiunea la bornele A, B iar sarcina (etajul în discuție) determină răspunsul în curent. Un caz real ce se apropie de această idealizare : o baterie cu rezistența mica de pierdere. În

acest caz semnalul de intrare este tensiunea $u(t)$ iar răspunsul este curentul $i(t)$.

În fig. 7c este simbolizat atacul cu generator ideal de curent. Se presupune că acesta impune curentul lăsînd circuitului libertatea de a determina răspunsul în tensiune. Asadar atacul este $i(t)$ și răspunsul $u(t)$. Un exemplu care să se apropie de cazul generatorului ideal de curent este acțiunea tranzistorului în montaj emitor comun la bornele colector - emitor (vezi schema de semnal din fig. 3)

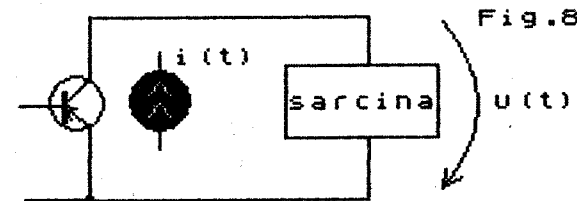


Fig. 8

Să luăm exemplul componentelor electrice de bază :

- Rezistență : $u(t) = R \times i(t)$ (3) (răspunde cu o tensiune proporțională cu atacul în curent)
- Bobina : $u(t) = L \times i'(t)$ (4) (răspunde cu o tensiune proporțională cu viteza de variație a atacului de curent)
- Condensator : $i(t) = C \times u'(t)$ (5) (răspunde cu un curent proporțional cu viteza de variație a tensiunii de atac)
- Dioda : $i(t) = I_0[\exp(qu(t)/kT) - 1]$ (ceea ce reprezintă o modificare neliniară)

Aplicarea formulelor de mai sus este dificilă în cazul unor circuite complexe. În aceste situații se dovedește eficientă analiza răspunsului la semnale de intrare din clasa sinusoidelor (regim sinusoidal).

5. Componente de bază în regim sinusoidal

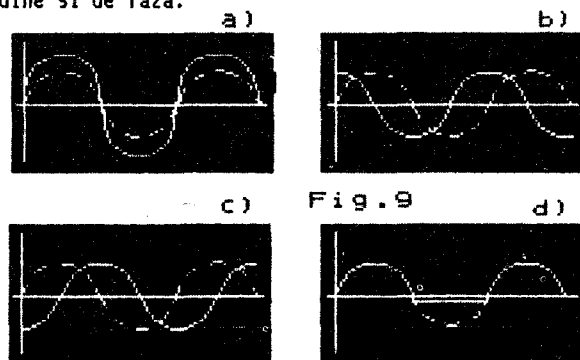
Particularizînd formulele 3,4,5 în cazul atacului cu generator de curent sinusoidal : (fig. 9)

- $i(t) = I \sin(\omega t)$ obținem :
 - Rezistență : $u(t) = R \times I \sin(\omega t)$ (7) (tensiunea este în fază cu curentul și de R ori mai "amplă")
 - Bobina : $u(t) = L \omega \times I \sin(\omega t + \pi/2)$ (8) (tensiunea este în avans cu un sfert de perioadă față

de curent si are amplitudinea proportionala cu inductanta si cu frecventa de lucru)

c) Condensator: $u(t) = (1/C\omega)[\sin(\omega t - \pi/2) + U(0)]$ (9) (tensiunea porneste de la valoarea aflata la borne in momentul declansarii atacului de curent evoluind apoi cu un sfert de perioada intirziere si cu o amplitudine invers proportionala cu capacitatea si cu frecventa de lucru .

d) Dioda : ca element neliniar da un raspuns nesinusoidal la un atac sinusoidal si de aceea nu mai poate fi caracterizata printr-o modificare de amplitudine si de faza.



Observatie : Concluziile redete anterior pot fi deduse si pe cale experimentală. Pentru aceasta,aveti nevoie de un generator de semnal sinusoidal (ex. E0501) pentru a simula atacul sinusoidal de tensiune si de un osciloscop cu doua spoturi care va permite masurarea amplitudinilor si a defazajului intre tensiunea si curentul de la bornele circuitului analizat. In general toate rezultatele pe care le vom obtine in continuare pot fi evidentiate experimental cu ajutorul unor montaje simple care utilizeaza instrumentele mentionate anterior. Nu voi mai repeta aceasta remarca general valabila, dar as dori sa o aveti in vedere pentru a evita impresia ca asistati la rationamente de interes teoretic . Superioritatea manierei matematice de abordare este faptul ca obtinem aceleasi rezultate cu metoda experimentală de analiza, intr-un mod mai sintetic, mai eficace, mai unitar. (Pentru a nu numara de fiecare data cite obiecte rezulta din alaturarea a doua obiecte cu alte trei, preferam formula: $2 + 3 = 5!$)

6. Semnificatia impedantei

Exemplele date in paragraful anterior se incadreaza intr-o situatie mai generala, pe care o vom analiza in continuare: *raspunsul in tensiune al unui circuit complex format din rezistente, condensatori si bobine liniare la un atac de curent sinusoidal, este o tensiune sinusoidală de aceeași frecvență, avind amplitudinea modificata de A ori si un defazaj fata de atacul in curent (fig.10).*

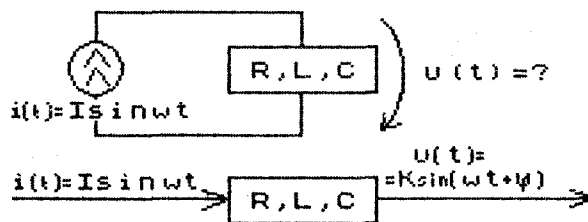


Fig.10 Definitia impedantei

Perechea $Z_c [A, \varphi]$ reprezinta reactia circuitului analizat la un atac sinusoidal de frecvență . Așa cum ati putut observa din exemplele simple de la punctul 5, marimile A si φ variaza o data cu frecvența de lucru, sugerind formula generala a raspunsului: (10) $u(t) = A(\omega)I \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

Pentru fiecare frecvență, perechea $[A(\omega), \varphi(\omega)]$ face o descriere completa a "personalitatii" circuitului in situatii de atac sinusoidal denumita :

impedanta circuitului (avind modulul A si faza φ)

Exemple:

a) Rezistenta (vezi (7))

$$A = R ; \varphi = 0 \quad \text{deci} \quad Z_c(\omega) = [R, 0]$$

b) Bobina (vezi (8))

$$A = L\omega ; \varphi = \pi/2 \quad \text{deci} \quad Z_c(\omega) = [L\omega, \pi/2]$$

c) Condensator (vezi (9))

$$A = 1/C\omega ; \varphi = -\pi/2 \quad \text{deci} \quad Z_c(\omega) = [1/C\omega, -\pi/2]$$

d) Dioda : nu putem vorbi de o impedanta !

e) Circuit RLC care atacat cu curentul $i(t) = 4 \sin(6,28t)$ raspunde cu $u(t) = 8 \sin(6,28t + \pi/10)$ are pentru frecvența unghiulară $\omega = 6,28$ (deci $f = 1 \text{ Hz}$) modulul $A = 2$ si faza $\varphi = \pi/10$ deci $Z_c(6,28) = [2, \pi/10]$

f) Reciproc daca un circuit are la frecvența unghiulară $\omega = 100$ impedanta $[2, \pi/4]$ deducem ca la atacul de curent $i(t) = \sin(100t)$ raspunsul in tensiune a circuitului va fi: $u(t) = 2 \sin(100t + \pi/4)$

7. Reprezentarea geometrica a impedantei

Faptul ca impedanta este caracterizata de doi parametri numerici, sugereaza reprezentarea ei intr-un plan (care reprezinta o lume cu doua dimensiuni). Vom atasa fiecărei impedante $[A, \varphi]$ un punct P in planul complex dupa regula: punctul P este la distanta A de origine si raza OP face unghiul φ cu axa orizontala pozitiva (fig.11).

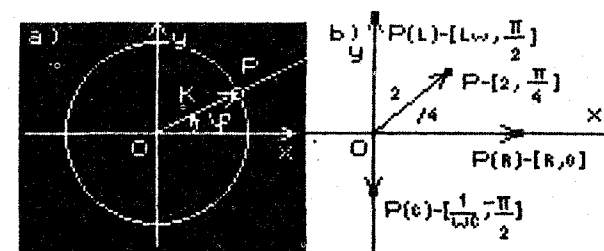


Fig.11 Reprezentarea geometrica a impedantei
Exemple (vezi fig 11b)

a) Rezistenta este reprezentata pe axa orizontala pozitiva: $P(R)$ pentru $Z_c = [R, 0]$

b) Inductanta este reprezentata pe axa verticala pozitiva la o distanta de origine care creste o data cu frecvența: $P(L)$ pentru $Z_c = [L\omega, \pi/2]$

c) Capacitatea este reprezentata pe axa verticala negativa, la o distanta de origine scazatoare cu frecvența: $P(C)$ pentru $Z_c = [1/C\omega, -\pi/2]$

OBS: Reprezentarea unei impedante in planul complex variaza in general cu frecvența de lucru. Compararea a doua impedante este expresiva numai daca ele se refera la aceeași frecvență ! In cele ce urmeaza se presupune respectata aceasta conditie.

8. Forma complexa a impedantei

Multimea punctelor din plan poate fi reprezentata si prin coordonatele x si y fata de sistemul de axe perpendiculare (fig.12).

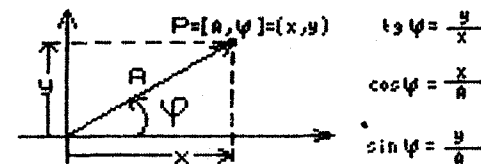


Fig.12 : Reprezentarea complexa a impedantei

Este evident ca formele prezentate pina acum : polara : [A, φ], geometrica : P , complexa : (x,y) reprezinta acelasi lucru. Fiecare din ele prezinta insa avantaje pent-ru anumite situatii.

Vom utiliza si relatiile de trecere (fig.11) :

$$A = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = A \cos \varphi$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad y = A \sin \varphi$$

Exemple (vezi fig.11b)

- a) Rezistenta $x=R$ $y=0$
- b) Inductanta $x=0$ $y=L\omega$
- c) Capacitatea $x=0$ $y=-1/C\omega$
- d) Circuitul cu $A=2$ si $\varphi=\pi/4$ are $x=1$ $y=1$

9. A-Adunarea semnalelor. B-Adunarea sinusoidelor. C-Adunarea impedantelor. D-Adunarea numerelor complexe

A) Sint situatii in care doua cauze se pot conjuga (insuma) in producerea unui efect unic. (De exemplu cind doua persoane se urca pe un cintar, acul cintarului reflecta suma greutatilor)

In electricitate putem obtine usor o insumare de semnale electrice (inseriere de surse, receptie simultana etc).

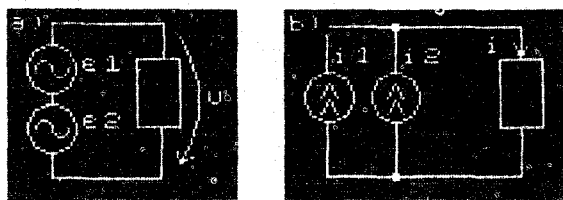
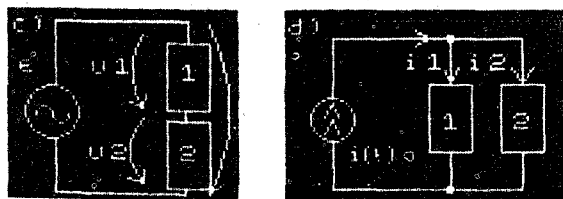
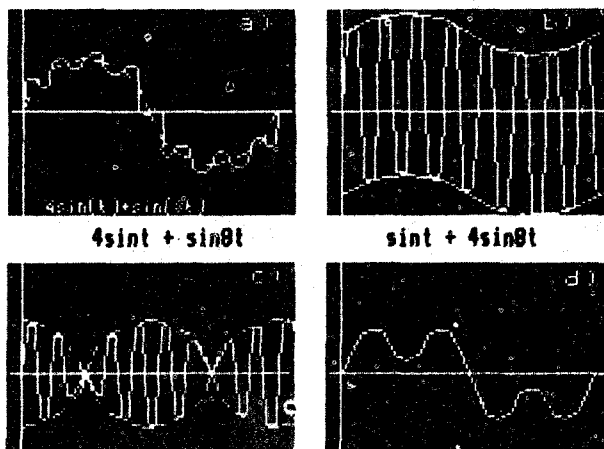


Fig.13 Adunarea semnalelor



B) Prezinta deci interes intrebarea: Ce se obtine prin insumarea a doua sinusoides ?

Daca raspunsul "tot o sinusoida" va tenteaza , analizati contraexemplele din figura 14 :



$$\sin 7t + \sin 9t = 2 \cos t \sin 8t \quad 2 \sin t + \sin 3t$$

Asadar in general rezultatul nu mai este sinusoidal ! Ne vom restringe insa la cazul particular (dar foarte important) in care cele doua sinusoides care se aduna au aceeasi frecventa (caz care rezulta firesc in situatia din figura 13 c, d)

In aceasta situatie putem arata atat teoretic (calcule banale de trigonometrie) cit si experimental ca rezultatul este tot o sinusoida de aceeasi frecventa. Asadar :

$$(13) A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Formulele de calcul pentru A si φ sint greoaie. S-a gasit insa o posibilitate foarte sugestiva de reprezentare grafica a acestor calcule -diagrama fazoriala-(justificata desigur matematic) redata in figura 15 ("regula paralelogramului").

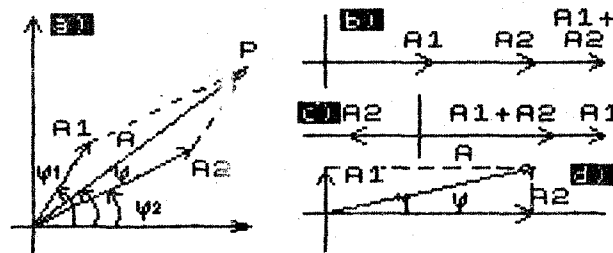
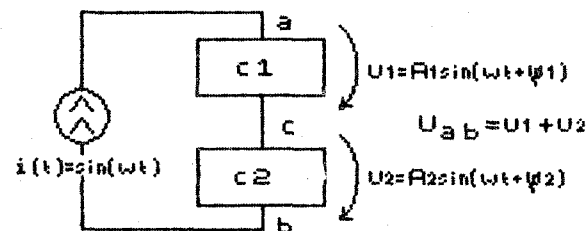


Fig.15 : Regula paralelogramului pentru adunarea sinusoidelor de aceeasi frecventa

- Exemple :
- a) Sinusoides in faza (fig.15b) : $A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) = (A_1 + A_2) \sin(\omega t)$
 - b) Sinusoides in antifaza (fig.15c) : $A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(\omega t + \pi) = A_1 \sin(\omega t) - A_2 \sin(\omega t) = (A_1 - A_2) \sin(\omega t)$
 - c) Sinusoides in cuadratura (fig.15d) : $A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(\omega t + \pi/2) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin(\omega t + \varphi)$ cu $\tan \varphi = \frac{A_2}{A_1}$
- C) Sa urmarim exemplul din figura 16 unde generatorul de curent $i(t) = \sin(\omega t)$ ataca un grup format din doua circuite RLC inseriate:



Raspunsul global U_{ab} este evident dat de adunarea celor doua sinusoides :

$$(14) U_{ab} = U_1 + U_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{unde } A \text{ si } \varphi \text{ sint date de regula paralelogramului (fig.15)}$$

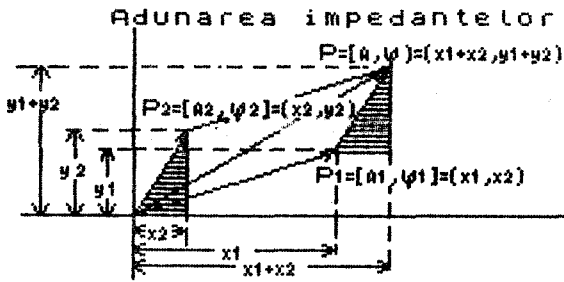
Acest rezultat putea fi obtinut si experimental Pe cale experimentala putem obtine valorile modului A si fazei φ a impedantei circuitului global rezultat prin inserierea circuitelor cu impedantele [A₁, φ₁] si [A₂, φ₂].

Este deci natural sa definim operatia de adunare a impedantelor astfel incit sa conduca la valorile lui A si φ constatate experimental sau aflate cu ajutorul regulii paralelogramului. Asadar : $[A_1, \varphi_1] + [A_2, \varphi_2] = [A, \varphi]$ (unde A, φ se calculeaza cu regula paralelogramului-fig.15)

Subliniez ca aceasta definitie naturala a adunarii impedantelor ne permite formularea sintetica : "impedanta a doua circuite legate in serie este egala cu suma impedantelor"

D) Cum se va executa adunarea impedantelor exprimate in celelalte forme ?

Pornind de la regula paralelogramului care ne da raspunsul firesc pentru forma geometrica : $P_1+P_2=P$ (fig.17)



si observind egalitatea triunghiurilor hasurate obtinem usor regula de adunare a impedanțelor in forma complexa:

$$(16) \quad x = x_1 + x_2$$

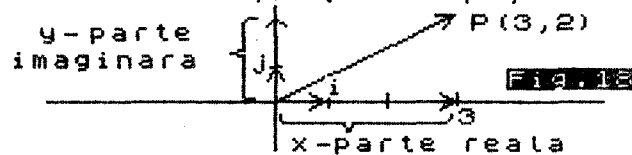
$$y = y_1 + y_2 \quad \text{asadar :}$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Aceasta este regula de adunare a numerelor complexe, careia ii corespunde geometric regula paralelogramului, trigonometric adunarea sinusoidelor si fizic inserierea impedanțelor !

10. Forma algebrica si trigonometrica

Daca in relatia evidenta :
 $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ se face notatia
 (17) $(1, 0) = 1$ (unitatea pe Ox)
 $(0, 1) = j$ (unitatea pe Oy)



obtinem : (18) $(x, y) = x + yj$ care este forma algebrica de reprezentare a impedanței complexe, cea mai raspindita in lucrarile de electronica.

In aceasta forma regula de adunare se prezinta:
 (19) $(x_1 + y_1j) + (x_2 + y_2j) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)j$
 ('se aduna partile reale si partile imaginare')

O ultima forma utila a impedanței complexe rezultă din aplicarea formulelor (11) si (12).

(20) $Z_c = x + yj = A \cos \varphi + A \sin \varphi j = A(\cos \varphi + j \sin \varphi)$
 (Forma trigonometrica a numarului complex).

Forma trigonometrica are un dublu avantaj:
 -scoate in evidenta marimile A si φ cu semnificatiile fizice cunoscute

-ofera valorile $x = A \cos \varphi$ si $y = A \sin \varphi$ avantajoase pentru efectuarea sumelor.

OBS: -Reamintim ca $j = (0, 1)$ este numar complex, reprezentind unitatea de masura pe axa imaginara

-In continuare vom releva semnificatia fizica a marimilor x si y si facilitatile de calcul ale formei trigonometrice-polare : A, φ

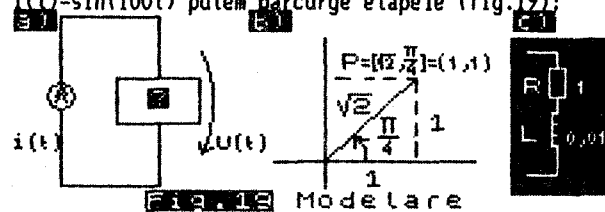
11. Semnificatii fizice ale coordonatelor

Am obtinut pentru componentele (fig.11b):

- a) Rezistenta $Z_c = (R, 0) = R + 0xj = R$
- b) Inductanta $Z_c = (0, L\omega) = 0 + L\omega j = L\omega j$
- c) Capacitatea $Z_c = (0, -1/C\omega) = 0 - 1/C\omega j = -1/C\omega j$

Exemplele de mai sus sugereaza o interpretare fizica a coordonatelor x si y ale impedanței: *partea rezistiva si respectiv partea reactiva a circuitului*; daca $y > 0$ partea reactiva este de tip inductiv, daca $y < 0$, este de tip capacitiv.

Intuim asadar ca, daca prin masurare (fig.19a) se obtine raspunsul $u(t) = 2 \sin(100t + \pi/4)$ la atacul $i(t) = \sin(100t)$ putem parcurge etapele (fig.19):



Din figura 19b deducem ca circuitul analizat are la frecventa unghiulara 100 impedanta $1+j$. Ne putem imagina ca aceasta impedanta rezulta din inserierea unei rezistente de valoare 1 cu o reactanta de valoare 1, propunind modelul din figura 19c.

Asadar $R=1, L\omega=1$ de unde $L \times 100=1$ si $L=0,01$

Modelul propus este valabil pentru $\omega = 100$ dar nu putem fi siguri de valabilitatea sa in cazul atacului cu un curent sinusoidal de alta frecventa ! Putem verifica experimental validitatea modelului in diverse situatii, sau descoperi necorespondente intre rezultatul masurat si cel calculat pe baza lui. Sa discutam aceste doua alternative:

A) Rezultatul experimental (la alta frecventa) nu coincide cu cel dedus din model. Inseamna ca in interiorul "cutiei negre" situatia electrica e mai complexa decit modelul propus. Se adauga modelului elemente noi, pina ce se ajunge la un "circuit electric echivalent", model pe care sa se obtina aceleasi concluzii cu cele aflate experimental.

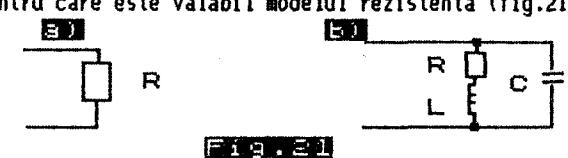
Aceasta este de fapt maniera in care circuitele fizice, reale sint transpuse in lumea schemelor electrice. Obiectul fizic pe care il numim "Rezistor" sau "Condensator" sau "Bobina" are o realitate complexa si este bine sa il distingeti de notiunile abstracte de "Rezistenta", "Capacitate" respectiv "Inductanta". Rezistenta este un model matematic care inseamna : "la atacul $i(t)$ raspunde cu $u(t)=Ri(t)$ ". Deci :

Obiect	Rezistor	Bobina	Condensator
Model	Rezistenta	Inductanta	Capacitate

fig. 20

Pentru a sublinia distinctia ilustrata in tabel sa consideram doua exemple:

Exemplul 1: Un rezistor atacat cu $i(t) = \sin \omega t$ raspunde cu $u(t) = R \sin \omega t$ intr-o anumita plaja de frecventa pentru care este valabil modelul rezistenta (fig.21a)



Daca vom lucra in sa la frecvente foarte inalte (in practica, selectorul TV este un bun exemplu) detalii fizice nesemnificative la frecvente mici (inductanta terminalelor, capacitatea dintre ele etc.) vor avea o influenta tot mai pronuntata, obligindu-ne sa completam modelul ca in figura 21b. Noul model, mai apropiat de realitate este desigur valabil si in joasa frecventa, dar contributia reactantelor fiind nesemnificativa, vom prefera neglijarea lor pentru simplificarea schemei si implicit a calculului.

De fapt la frecvente foarte inalte fiecare componenta fizica are un model electric complex si de aceea situatia electrica reala a selectorului este mult mai bogata decit cea indicata de schema electrica de care dispunem.

Exemplu 2: Sa analizam cazul din figura 22

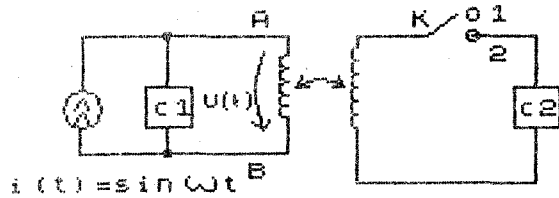


Fig. 22

Daca intrerupatorul K este deschis (secundarul transformatorului este in gol) si excitam circuitul primar cu $i(t) = \sin \omega t$ obtinem $u(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1)$ deci reprezentarea P1 in planul impedantelor complexe. Inchidem apoi contactul K. Din motive evidente ("secundarul fura energie") circuitul primar va "simti" prezenta circuitului secundar. La acelasi atac de curent masuram la bornele bobinei primar o noua valoare a tensiunii: $u_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ deci reprezentarea P2 in planul impedantelor complexe (fig. 23a).

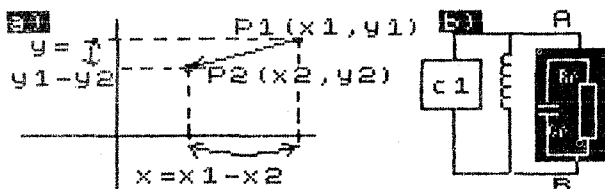


Fig. 23

Modelarea cu elemente reflectate

Observam asadar modificarea impedantei la bornele A B si din fig. 23a calculam deviatiiile: $x_1 - x_2 = x$, $y_1 - y_2 = y$ produse de interventia circuitului secundar. Scaderea valorilor rezistentei si reactantei poate fi modelata (fig. 23b) prin introducerea elementelor R_r si C_r in paralel cu modelul circuitului primar izolat. Aceste elemente (capacitatea si rezistenta reflectata) modeleaza influenta secundarului asupra primarului. Desigur este vorba de elemente de circuit (modele), si nu de obiecte fizice!

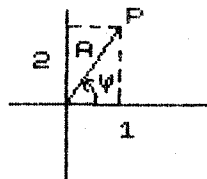
B) Intr-o plaja de frecventa care cuprinde zona in care urmeaza sa fie utilizat circuitul modelul da rezultate satisfacatoare.

Un exemplu de verificare pentru cazul din fig. 19a modelat in figura 19c ca urmare a excitarii cu $i(t) = \sin 100t$ (cu rezultatul in fig. 19b) se obtine prin excitarea circuitului cu $i(t) = \sin 200t$.

Folosind modelul putem calcula rezultatul:

$$u(t) = u_r + u_l = R \sin(\omega t) + L \omega \sin(\omega t + \pi/2) = \sin(200t) + 2 \sin(200t + \pi/2) = \sqrt{5} \sin(200t + 1,107)$$

Putem folosi formalismul complex pentru a ajunge mai usor la acest rezultat (evitam astfel calcularea sumei sinusoidelor) - fig. 24.



$$A = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{1} = 2$$

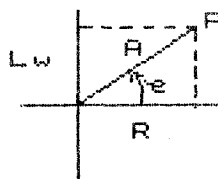
$$\varphi = \arctg 2 = 1,107$$

Fig. 24

Deci: $Z = Z_r + Z_l = R + (\omega L)j = 1 + 2j$ adica punctul P care are modulul $\sqrt{5}$ si faza $\arctg 2 = 1,107$

Nu ramane decit sa efectuam experienta atacului cu $i(t) = \sin(200t)$ si sa verificam raspunsul anticipat prin calcule: $u(t) = \sqrt{5} \sin(200t + 1,107)$, pentru a valida modelul in cazul atacului cu $\omega = 200$.

Continuind aceasta verificare pentru alte frecvente vom compara rezultatul experimental cu cel calculat pe baza modelului (fig. 25)



$$A = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega}{R}$$

$$\varphi = \arctg \frac{L \omega}{R}$$

Fig. 25

Obs. Masuratorile vor fi facute numai in plaja de frecvente in care va fi utilizat efectiv circuitul. In afara ei iesirea realitatii din cadrul modelului nu ne deranjeaza!

12. Admitanta complexa; Inversarea unui numar complex. Consideratiile anterioare pot fi reluate cu totul analog (dualitate) pentru cazul in care se considera atacul in tensiune si raspunsul in curent:

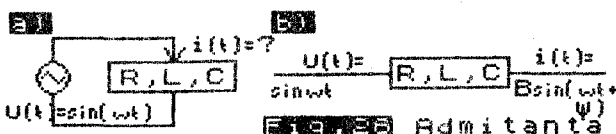


Fig. 26 Admitanta

In acest caz raspunsul in curent este tot sinusoidal avind modificarile B (de amplitudine) si ψ (de faza), deci tot o modificare de tip complex.

Ansamblul $Y = [B, \psi]$ este numit admitanta complexa a circuitului.

Vom regasi si pentru admitante cele cinci forme de reprezentare:

(23) $Y = [B, \psi] = Q = (x, y) = x + jy = B(\cos \psi + j \sin \psi)$ dar semnificatiile fizice vor diferi.

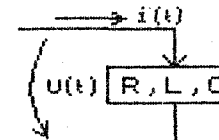
Exemple: $u(t) = \sin(\omega t)$

a) rezistenta $i(t) = 1/R \sin \omega t$ $Y = [1/R, 0] = (1/R, 0)$

b) inductanta $i(t) = 1/L \omega \sin(\omega t - \pi/2)$ $Y = [1/L \omega, -\pi/2] = (0, -1/L \omega)$

c) capacitate $i(t) = C \omega \sin(\omega t + \pi/2)$ $Y = [C \omega, \pi/2] = (0, C \omega)$

Analizind figura 27 ne putem incadra in cazul atacului de tensiune sau de curent obtinind:



$$U(t) = U \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Fig. 27

pentru impedanta X: $A = U/I$ $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
pentru admitanta Y: $B = I/U$ $\psi = \varphi_i - \varphi_u$

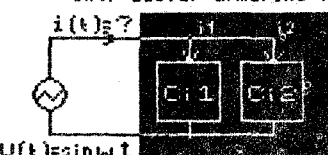
Din aceste relatii deducem regula:
(24) $B = 1/A$ si $\psi = -\varphi$
Asadar admitanta are ca modul inversul modului impedantei si are faza cu semn opus.

Introducind in multimea numerelor complexe operatia de inversare dupa regula:

(25) $1/Z = 1/[A, \varphi] = [1/A, -\varphi]$, putem enunta:
admitanta complexa este inversa impedantei complexe
 $Y_c = 1/Z_c$

Utilitatea practica a notiunii de admitanta se dovedeste in cazul legarilor in paralel, datorita calculelor simple la care conduce.

Intr-adevar urmarind fig. 28



$$i_1 = B_1 \sin(\omega t + \psi_1)$$

$$i_2 = B_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

Fig. 28

in care deducem :

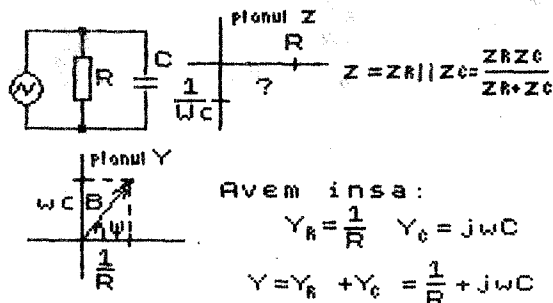
$$(26) i(t) = i_1 + i_2 = B_1 \sin(\omega t + \psi_1) + B_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

Am vazut in sa ca acestei insumari trigonometrice ii corespunde operatia de adunare a numerelor complexe. Asadar : admitanta ansamblului paralel este egala cu suma admitantelor.

$$(27) Y = Y_1 + Y_2 \quad [B, \psi] = [B_1, \psi_1] + [B_2, \psi_2]$$

Exemplu:

Fie circuitul RC paralel din fig.29



Deci $B = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \omega^2 C^2}$ $\text{tg} \psi = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = \omega R C$

deducem ca raspunsul circuitului este :

$$(28) i(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \omega^2 C^2} \sin(\omega t + \arctg \omega R C)$$

de unde rezulta pentru impedanta :

$$A = \frac{1}{B} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \quad \varphi = -\psi = -\arctg \omega R C$$

asadar la un atac in curent $i(t) = \sin(t)$ circuitul raspunde :

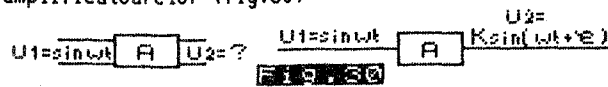
$$(29) u(t) = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega R C)$$

Observatii: formulele obtinute releva comportarea circuitului RC paralel in regim sinusoidal (filtru, defazor, etc)

13. Factor de amplificarea complex.

Inmultirea impedantelor.

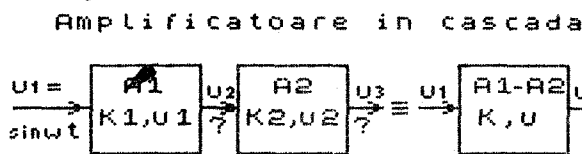
Un alt caz in care ne intereseaza relatia intre o sinusoida de iesire si una de intrare este acela al amplificatoarelor (fig.30)



Vom presupune si de aceasta data situatia de liniaritate, asadar ca raspunsul $u_2(t)$ la atacul sinusoidal $u_1(t)$ este tot o sinusoida.

Grupul $[K, \varphi]$ care exprima modificarea sinusoidelor va fi numit acum *coeficient complex de amplificarea*. Semnificatii fizice: K - factor de amplificarea (>1) sau atenuare (<1) φ - avans (>0) sau intirziere (<0) de faza

Daca realizam un lant (cascada) de amplificatoare (fig.31)



Amplificatoare in cascada

si asiguram conditia de independenta (separare) a celor doua etaje (in practica legarea etajelor poate conduce la o modificare a comportarii lor fata de situatia in care lucreaza separat) este firesc sa deducem raspunsul :

$$(30) u_2(t) = K_2(K_1 \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2))$$

Asadar factorul de amplitudine este egal cu produsul factorilor iar faza totala e egala cu suma fazelor (amplificarile se inmultesc si intirzierile se sumeaza).

Definim regula de inmultire a numerelor complexe astfel incit propozitia de mai sus sa capete forma factorii complexi de amplificarea se inmultesc in cazul legarii in cascada.

Este evident ca pentru aceasta trebuie sa adoptam regula de inmultire a numerelor complexe:

$$(31) [A_1, \varphi_1] \times [A_2, \varphi_2] = [A_1 \times A_2, \varphi_1 + \varphi_2]$$

De aici rezulta urmatoarele reguli de inmultire pentru celelalte forme de sc iere a numerelor complexe: trigonometrica (32) si a gberica (33) :

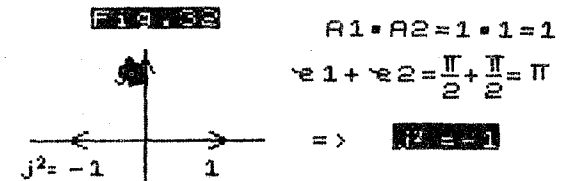
$$(32) [A_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)] \times [A_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)] = A_1 A_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$(33) (x_1 + y_1 j)(x_2 + y_2 j) = x_1 x_2 + y_1 y_2 j^2 + x_1 y_2 j + y_1 x_2 j$$

Relatiile de mai sus indica faptul ca forma polara - trigonometrica este avantajoasa pentru inmultire, in timp ce cea algebrica prezinta avantajul simplitatii pentru calcule de sume.

Sa mai remarcam faptul ca:

$$(34) j j = [1, \pi/2][1, \pi/2] = [1, \pi] = (-1, 0) = -1$$

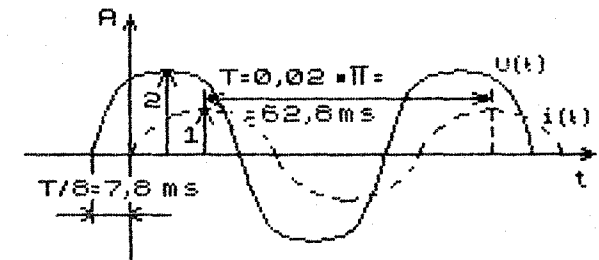


pe care introducind-o in 33 obtinem :

$(x_1 + y_1 j)(x_2 + y_2 j) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$
Asadar numarul complex j (unitatea pe axa imaginara) are proprietatea ca $j^2 = -1$ datorita modului de definire a numerelor complexe. De aceea se poate inlocui $-j$ cu $1/j$ si impedanta unui condensator ia forma: $Z_c = 1/j\omega C$ in loc de $-j/\omega C$

14. Exerciitiu.

Urmarind figura de mai jos in care este reprezentat punctat atacul unui circuit RLC cu un generator de curent $i(t)$ si cu linie continua raspunsul sau sinusoidal de tensiune $u(t)$:



sa se precizeze:

- frecventa f si frecventa unghiulara ω de lucru
- modulul impedantei circuitului la aceasta frecv.
- faza impedantei
- rezistenta echivalenta ; reactanta echivalenta
- cu modelul serie stabilit la punctul (d), care trebuie sa fie raspunsul la atacul $i(t) = \sin(200t)$?
- daca la un atac $i(t) = \sin(400t)$ circuitul raspunde cu $u(t) = 4 \sin(400t + 1,5)$ este valabil modelul propus pentru $\omega = 400$?
- admitanta echivalenta a circuitului pentru frecventa de lucru reprezentata in figura
