RATIONAMENTE DE BAZA

SEMNALUL SINUSOIDAL SI PRELUCRAREA LUI

ing. IOAN ROSCA

Scopul acestui articol este de a lamuri semnificatia unor notiuni de baza care fac obiectul unor confuzii perturbatoare. Datorita caracterului abstract pe care utilizarea impedantei complexe il imprima rationamentelor se produce o instrainare de semnificatia directa, fizica. Acest fenomen este evitabil deoarece notiunea de impedanta complexa este extrem de simpla matematic si are semnificatii fizice foarte clare.

Va propun in acest sens sa raspundeti la citeva intrebari despre notiuni cu care se opereaza curent in literatura de specialitate :

- Care este rolul semnalului sinusoidal in analiza comportarii circuitelor electrice ?
- Ce intelegeti prin frecventa unghiulara si prin faza unei sinusoide ?
- Cum reactioneaza in curent o bobina atacata de un generator de tensiune sinusoidala ?
- Ce este impedanta unui dipol ?
- Ce sens are impedanta unei diode ?
- Pot exista impedante cu valoarea 75 ohmi ?
- Ce semnificatie fizica are impedanta 3+4j ? Ce semnificatie are j in aceasta expresie ? Ce modul are aceasta impedanta ? La ce frecventa a fost masurata daca ea reprezinta inserierea unei rezistente de valoare 3 cu o inductanta de valoare 2 ?
- Ce rezulta din adunarea a doua sinusoide ? Dar daca au aceasi frecventa ?
- Ce reprezinta capacitatea "reflectata" din secundarul in primarul unui transformator ?

In cele ce urmeaza veti gasi raspunsuri la aceste intrebari

1. Marimi fizice. Semnale.

In natura se produc fenomene fizice diverse in cadrul carora variaza anumite marimi fizice. Fiind insuficienta descrierea calitativa, se introduc unitati de masura si se obtin prin masurare descrieri cantitative ale evolutiei marimilor fizice in timp numite *semnale*. Semnalele sint descrise in forme diverse (tabele, grafice, denumiri).

In figura 1 sint redate citeva forme de semnal:

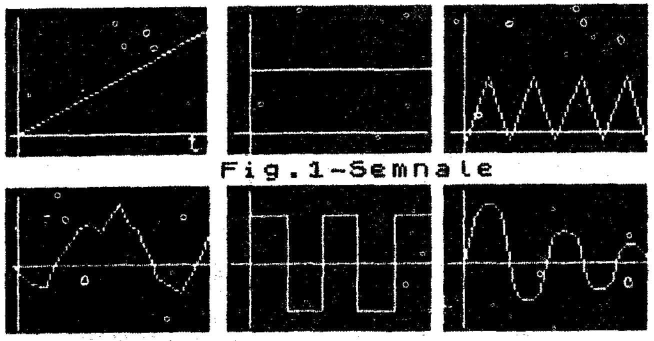


Fig.1-Semnale

Redarea unui semnal prin tabelul valorilor este *greoaie*. Descrierea sa grafica este avantajoasa si expresiva. Totusi, pentru a ne putea referi la un semnal de un anumit tip si a-l introduce in anumite "operatii", avem nevoie de o descriere simbolica (un nume dat semnalului *respectiv*).

2. Semnalul sinusoidal

In multe procese naturale se produc semnale de tip oscilatie. Tabelele lor de valori au o conformatie specifica, pusa mai bine in evidenta de aspectul grafic (vezi fig.2).

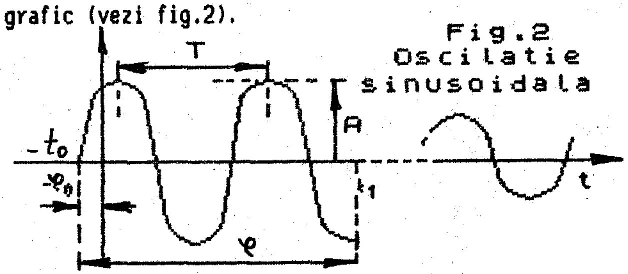


Fig.2 Oscilatie sinusoidala

Negliјind zona de amortizare forma de semnal din figura 2 este inrudita cu o forma clasica denumita *sinus* care este studiata in trigonometrie (fig3)

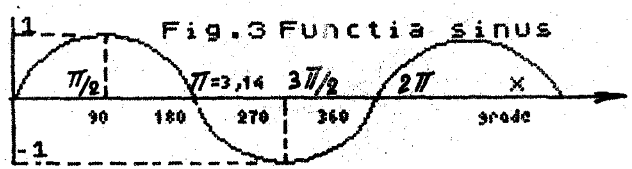


Fig.3 Functia sinus

De aceea semnalul din figura 2 este denumit *sinusoida* (din familia lui sinus) avind reprezentarea simbolica :

(1) $x(t) = A\sin(\omega t+\varphi_0)$ unde :

sin = functia sinus din figura 3

A = amplitudine (de care depinde in general intensitatea efectelor produse)

T = perioada (durata unei oscilatii complete)

f = frecventa = 1 / T

ω = frecventa unghiulara = $2\pi f \simeq 6{,}28f$

φ_0 = faza initiala (pozitia atinsa pe sinus in momentul in care incepe masurarea)

φ = faza = $\omega t + \varphi_0$ = pozitia atinsa pe sinusoida la momentul t

Observatie : T,f,ω, caracterizeaza viteza de repetitie a fenomenului periodic.

3. Modificarile unei sinusoide

Daca o sursa produce o oscilatie (cauza) o inlantuiere de fenomene fizice (propagare) poate provoca variatii sinusoidale ale unor alte marimi (efecte) Semnalele efecte(iesiri) au o evolutie legata de evolutia cauzei (intrare). Forma "iesirii" urmareste mai mult sau mai putin fidel forma semnalului de intrare.

In multe situatii semnalul de iesire nu mai pastreaza caracteristicile unei sinusoide de intrare (modificari de forma si frecventa). In astfel de cazuri spunem ca au avut loc transformari *neliniare*. Mentionam ca exemple dioda si tranzistorul care deformeaza semnalele sinusoidale.

Citeva exemple sint redate in figura 4 (reprezentind respectiv situatiile: sinusoida limitata, sinusoida perturbata de zgomot, sinusoida distorsionata, sinusoida modulata in amplitudine)

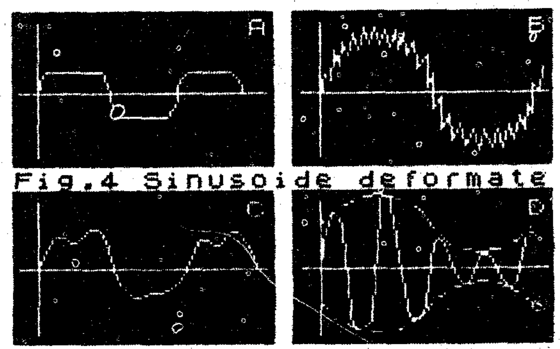


Fig.4 Sinusoide deformate

Ne vom ocupa numai de transformarile *liniare* adica acelea in care sint modificate doar amplitudinea si faza sinusoidei.

Referindu-ne la situatia generala simbolizata in figura 5:

Fig.5

vom trata cazul in care raspunsul y(t) are forma :

(2) $y(t) = K \times A\sin(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$

Asadar au suferit modificari :

amplitudinea - in raport K

faza - cu deviatia $\Delta\varphi$

Figura 6 reda grafic citeva situatii particulare

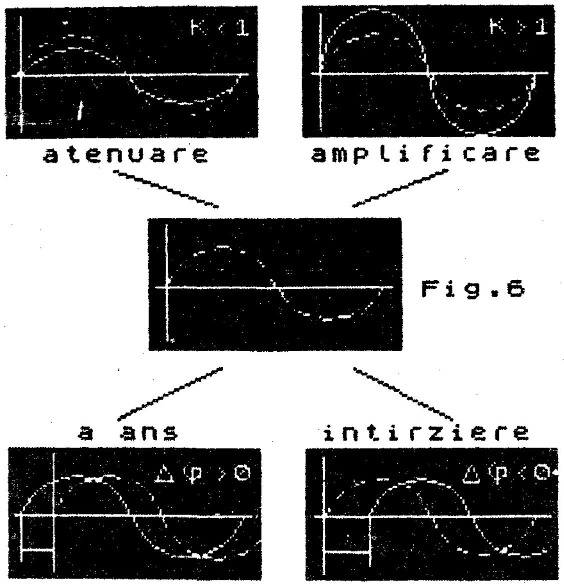


Fig.6

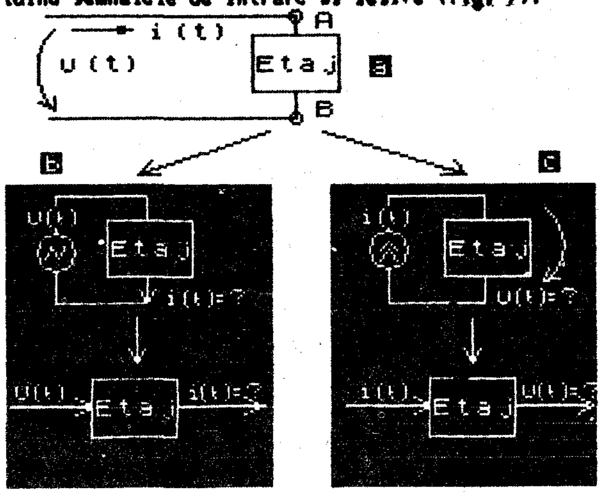
Observatie : Aceste "modificari" *trebuie interpretate* in functie de semnificatia semnalelor de intrare si de iesire. Astfel, putem vorbi de o amplificare numai daca semnalele au aceeasi semnificatie fizica si aceeasi unitate de masura. Deasemenea modificarile de faza presupun raportarea la aceeasi scara de timp si acelasi etalon. Numai semnalele cu aceeasi perioada pot fi caracterizate de o anumita relatie de faza (in tirziere sau avans).

4. Cazul circuitelor electrice

In cazul circuitelor electrice,marimile fizice a caror variatie poarta informatia utila sint : sarcina , curentul si tensiunea electrica si fluxul magnetic . Evolutia masurata a acestor marimi (semnale electrice) poate avea forme variate . Ne vom concentra atentia asupra formelor semnalelor fara a discuta fenomenele fizice care le genereaza . Din acest punct de vedere (informational) putem vorbi de un semnal de intrare si un altul de iesire (vezi fig.5). Etajul va furniza semnalul de iesire conform intrarii si structurii lui interioare fiind caracterizat de o anumita *lege de transformare* .

Vom considera cazul particular al semnalelor de intrare sinusoidale , analizind reactia etajelor *liniare* la care iesirea va fi o sinusoida din aceeasi familie cu intrarea dar cu o alta amplitudine si cu o alta faza (putem vorbi de un factor complex de transfer al semnalului sinusoidal).

Pentru inceput sa luam cazul unei porti electrice caracterizate printr-o anumita tensiune la borne si un anumit curent - variabile in timp -, constituind semnalele de intrare si iesire (fig. 7).



In fig. 7b este reprezentat cazul atacului cu generator ideal de tensiune . Se presupune deci ca generatorul impune tensiunea la bornele A, B iar sarcina (etajul in discutie) determina raspunsul in curent . Un caz real ce se apropie de aceasta idealizare : o baterie cu rezistenta mica de pierderi . In acest caz semnalul de intrare este tensiunea u(t) iar raspunsul este curentul i(t) .

In fig. 7c este simbolizat atacul cu generator ideal de curent . Se presupune ca acesta impune curentul lasind circuitului libertatea de a determina raspunsul in tensiune . Asadar atacul este i(t) si raspunsul u(t) . Un exemplu care sa apropie de cazul generatorului ideal de curent este actiunea tranzistorului in montaj emitor comun la bornele colector - emitor (vezi schema de semnal din fig. 3)

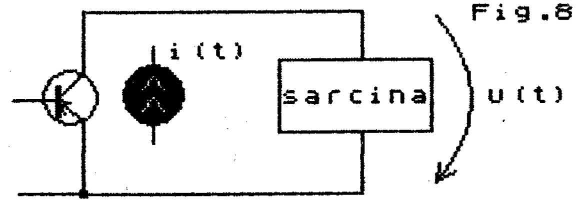


Fig.8

Sa luam exemplul componentelor electrice de baza :

a) Rezistenta : $u(t) = R \times i(t)$ (3) (raspunde cu o tensiune proportionala cu atacul in curent)

b) Bobina : $u(t) = L \times i'(t)$ (4) (raspunde cu o tensiune proportionala cu viteza de variatie a atacului de curent)

c) Condensator : $i(t) = C \times u'(t)$ (5) (raspunde cu un curent proportional cu viteza de variatie a tensiunii de atac)

d) Dioda : $i(t) = I_0[\exp(qu(t)/kT)-1]$ (ceea ce reprezinta o modificare neliniara)

Aplicarea formulelor de mai sus este dificila in cazul unor circuite complexe. In aceste situatii se dovedeste eficace analiza raspunsului la semnale de intrare din clasa sinusoidelor (regim sinusoidal).

5. Componente de baza in regim sinusoidal

Particularizind formulele 3,4,5 in cazul atacului cu generator de curent sinusoidal : (fig.9)

(6) $i(t) = I\sin(\omega t)$ obtinem :

a) Rezistenta : $u(t) = R \times I\sin(\omega t)$ (7)

(tensiunea este in faza cu curentul si de R ori mai "ampla")

b) Bobina : $u(t) = L\omega \times I\sin(\omega t + \pi/2)$ (8)

(tensiunea este in avans cu un sfert de perioada fata de curent si are amplitudinea proportionala cu inductanta si cu frecventa de lucru)

c) Condensator: $u(t) = (1/C\omega)I\sin(\omega t-\pi/2)+U(0)$ (9) (tensiunea porneste de la valoarea aflata la borne in momentul declansarii atacului de curent evoluind apoi cu un sfert de perioada intirziere si cu o amplitudine invers proportionala cu capacitatea si cu frecventa de lucru .

d) Dioda : ca element neliniar da un raspuns nesinusoidal la un atac sinusoidal si de aceea nu mai poate fi caracterizata printr-o modificare de amplitudine si de faza.

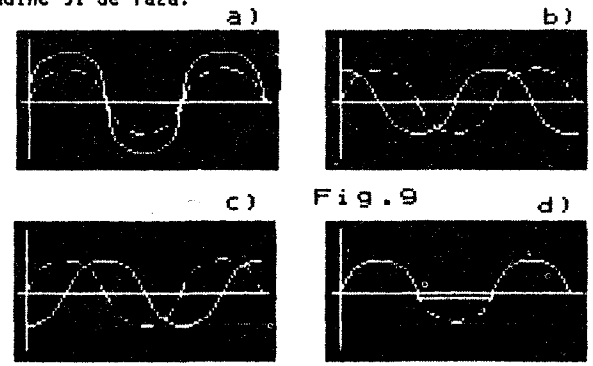


Fig.9

Observatie : Concluziile redate anterior pot fi deduse si pe cale experimentala. Pentru aceasta,aveti nevoie de un generator de semnal sinusoidal (ex. E0501) pentru a simula atacul sinusoidal de tensiune si de un osciloscop cu doua spoturi care va permite masurarea amplitudinilor si a defazajului intre tensiunea si curentul de la bornele circuitului analizat. In general toate rezultatele pe care le vom obtine in continuare pot fi evidentiate experimental cu ajutorul unor montaje simple care utilizeaza instrumentele mentionate anterior. Nu voi mai repeta aceasta remarca general valabila, dar as dori sa o aveti in vedere pentru a evita impresia ca asistati la rationamente de interes teoretic . Superioritatea manierei matematice de abordare este faptul ca obtinem aceleasi rezultate cu metoda experimentala de analiza, intr-un mod mai sintetic, mai eficace, mai unitar. (Pentru a nu numara de fiecare data cite obiecte rezulta din alaturarea a doua obiecte cu alte trei, preferam formula : 2 + 3 = 5 !)

6. Semnificatia impedantei

Exemplele date in paragraful anterior se incadreaza intr-o situatie mai generala, pe care o vom analiza in continuare: *raspunsul in tensiune al unui circuit complex format din rezistente, condensatori si bobine liniare la un atac de curent sinusoidal,este o tensiune sinusoidala de aceeasi frecventa, avind amplitudinea modificata de A ori si un defazaj fata de atacul in curent* (fig.10).

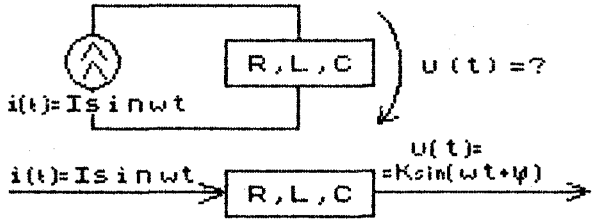


Fig.10 Definirea impedantei

Perechea Zc [A,φ] reprezinta reactia circuitului analizat la un atac sinusoidal de frecventa . Asa cum ati putut observa din exemplele simple de la punctul 5, marimile A si φ variaza o data cu frecventa de lucru, sugerind formula generala a raspunsului:

(10) $u(t) = A(\omega)I\sin(\omega t+\varphi(\omega))$

Pentru fiecare frecventa,perechea $[A(\omega),\varphi(\omega)]$ face o descriere completa a "personalitatii" circuitului in situatii de atac sinusoidal denumita : ***impedanta circuitului***(avind ***modulul*** A si ***faza*** φ)

Exemple:

a)Rezistenta (vezi (7))

$A = R$; $\varphi = 0$ deci $Zc(\omega) = [R,0]$

b)Bobina (vezi (8))

$A = L\omega$; $\varphi = \pi/2$ deci $Zc(\omega) = [L\omega,\pi/2]$

c)Condensator(vezi (9))

$A = 1/C\omega$; $\varphi = -\pi/2$ deci $Zc(\omega) = [1/C\omega,-\pi/2]$

d)Dioda : nu putem vorbi de o impedanta !

e)Circuit RLC care atacat cu curentul $i(t)=4\sin6,28t$ raspunde cu $u(t)=8\sin(6,28t+\pi/10)$ are pentru frecventa unghiulara $\omega=6,28$ (deci f=1Hz) modulul A=2 si faza $\varphi=\pi/10$ deci $Zc(6,28)=[2,\pi/10]$

f)Reciproc daca un circuit are la frecventa unghiulara $\omega=100$ impedanta $[2,\pi/4]$ deducem ca la atacul de curent $i(t)=\sin(100t)$ raspunsul in tensiune a circuitului va fi: $u(t)= 2\sin(100t+\pi/4)$

7. Reprezentarea geometrica a impedantei

Faptul ca impedanta este caracterizata de doi parametri numerici,sugereaza reprezentarea ei intr-un plan (care reprezinta o lume cu doua dimensiuni). Vom atasa fiecarei impedante [A,φ] un punct P in planul complex dupa regula: punctul P este la distanta A de origine si raza OP face unghiul φ cu axa orizontala pozitiva (fig.11).

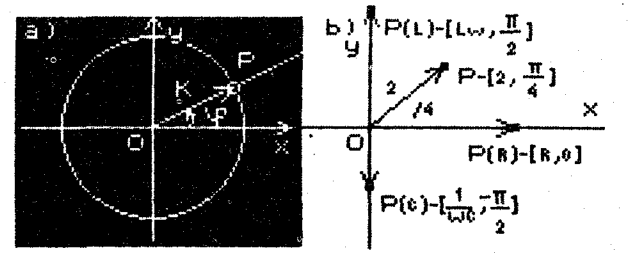


Fig.11 Reprezentarea geometrica a impedantei

Exemple (vezi fig 11b)

a)Rezistenta este reprezentata pe axa orizontala pozitiva: P(R) pentru Zc=[R,0]

b)Inductanta este reprezentata pe axa verticala pozitiva la o distanta de origine care creste o data cu frecventa: P(L) pentru $Zc=[L\omega,\pi/2]$

c)Capacitatea este reprezentata pe axa verticala negativa, la o distanta de origine scazatoare cu frecventa: P(C) pentru $Zc=[1/C\omega,-\pi/2]$

OBS: Reprezentarea unei impedante in planul complex variaza in general cu frecventa de lucru. Compararea a doua impedante este expresiva numai daca ele se refera la aceeasi frecventa ! In cele ce urmeaza se presupune respectata aceasta conditie.

8. Forma complexa a impedantei

Multimea punctelor din plan poate fi reprezentata si prin coordonatele x si y fata de sistemul de axe perpendiculare (fig.12).

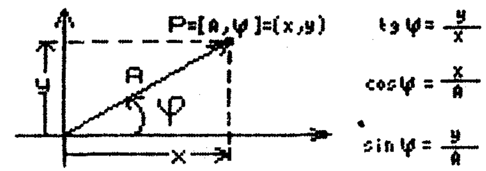


Fig.12 : Reprezentarea complexa a impedantei

Este evident ca formele prezentate pina acum : polara : [A,φ] , geometrica : P , complexa : (x,y) reprezinta acelasi lucru. Fiecare din ele prezinta insa avantaje pent~u anumite situatii.

Vom utiliza si relatiile de trecere (fig.11) :

$$A = \sqrt{x^2+y^2} \qquad x = A\cos\varphi$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x} \qquad y = A\sin\varphi$$

Exemple (vezi fig.11b)

a)Rezistenta	x=R	y=0
b)Inductanta	x=0	$y=L\omega$
c)Capacitatea	x=0	$y=-1/C\omega$
d)Circuitul cu A= 2 si $\varphi=\pi/4$ are x=1		y=1

9. A-Adunarea semnalelor. B-Adunarea sinusoidelor. C-Adunarea impedantelor.D-Adunarea numerelor complexe

A) Sint situatii in care doua cauze se pot conjuga (insuma) in producerea unui efect unic. (De exemplu cind doua persoane se urca pe un cintar,acul cintarului reflecta suma greutatilor)

In electricitate putem obtine usor o insumare de semnale eletrice (inseriere de surse, receptie simultana etc).

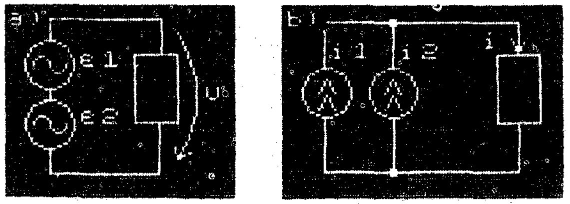
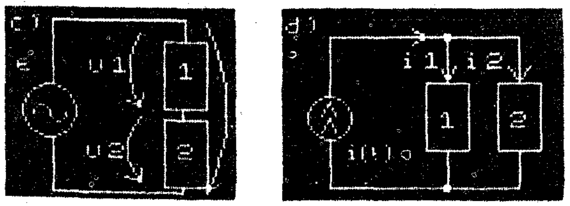
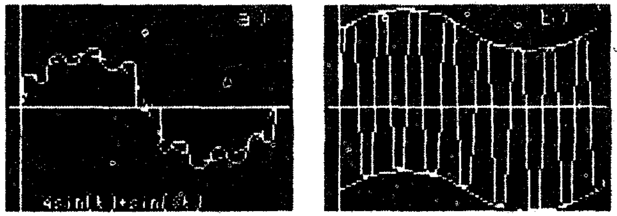


Fig.13 Adunarea semnalelor

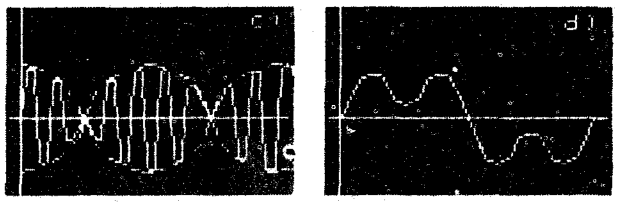


B) Prezinta deci interes intrebarea: Ce se obtine prin insumarea a doua sinusoide ?

Daca raspunsul "tot o sinusoida" va tenteaza , analizati contraexemplele din figura 14 :



4sint + sin8t **sint + 4sin8t**



sin7t+sin9t=2costsin8t **2sint + sin3t**

Asadar in general rezultatul nu mai este sinusoidal ! Ne vom restringe insa la cazul particular (dar foarte important) in care cele doua sinusoide care se aduna au aceeasi frecventa (caz care rezulta firesc in situatia din figura 13 c, d)

In aceasta situatie putem arata atit teoretic (calcule banale de trigonometrie) cit si experimental ca *rezultatul este tot o sinusoida de aceeasi frecventa*. Asadar :

(13) $A_1\sin(\omega t+\varphi_1) + A_2\sin(\omega t+\varphi_2) = A\sin(\omega t+\varphi)$

Formulele de calcul pentru A si φ sint greoaie. S-a gasit insa o posibilitate foarte sugestiva de reprezentare grafica a acestor calcule -diagrama fazoriala-(*justificata desigur matematic*) *redata in figura 15* ("regula paralelogramului").

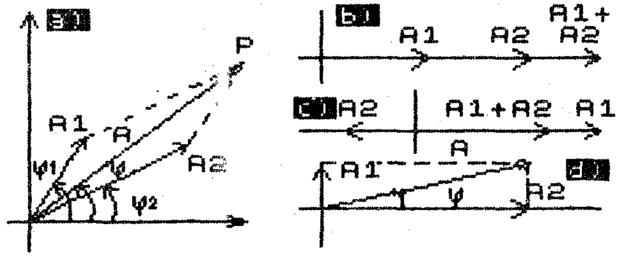


Fig.15 : Regula paralelogramului pentru adunarea *sinusoidelor de aceeasi frecventa*

Exemple :

a)Sinusoide in faza (fig.15b) :

$A_1\sin(\omega t) + A_2\sin(\omega t) = (A_1+A_2)\sin(\omega t)$

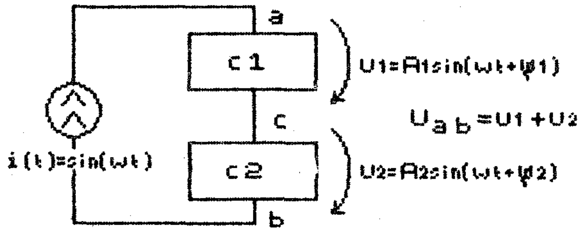
b)Sinusoide in antifaza (fig.15c) :

$A_1\sin(\omega t) + A_2\sin(\omega t+\pi) = A_1\sin(\omega t) - A_2\sin(\omega t) = (A_1-A_2)\sin(\omega t)$

c)Sinusoide in cuadratura (fig.15d) :

$A_1\sin(\omega t) + A_2\sin(\omega t+\pi/2) = A_1\sin(\omega t) + A_2\cos(\omega t) = \sqrt{A_1^2+A_2^2}\,\sin(\omega t+\varphi)$ cu $tg\,\varphi = \frac{A_2}{A_1}$

C) Sa urmarim exemplul din figura 16 unde generatorul de curent $i(t)=\sin(\omega t)$ ataca un grup format din doua circuite RLC inseriate:



Raspunsul global Uab este evident dat de adunarea celor doua sinusoide :

(14) $Uab = U1 + U2 = A1\sin(\omega t+\varphi_1) + A2\sin(\omega t+\varphi_2) = A\sin(\omega t+\varphi)$ unde A si φ sint date de regula paralelogramului (fig.15)

Acest rezultat putea fi obtinut si experimental *Pe cale experimentala putem obtine valorile modulului* A si fazei φ a impedantei circuitului global rezultat prin inserierea circuitelor cu impedantele [A_1 , φ_1] si [A_2 , φ_2].

Este deci natural sa definim operatia de *adunare a impedantelor* astfel incit sa conduca la valorile lui A si φ constatate experimental sau aflate cu ajutorul regulii paralelogramului. Asadar:

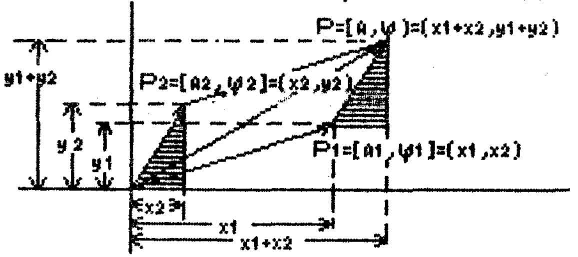
(15 [A1,φ1] + [A2,φ2] = [A,φ] (unde A ,φ se calculeaza cu regula paralelogramului-fig.15)

Subliniez ca aceasta definitie naturala a adunarii impedantelor ne permite formularea sintetica : *"impedanta a doua circiute legate in serie este egala cu suma impedantelor"*

D) Cum se va executa adunarea impedantelor exprimate in celelalte forme ?

Pornind de la regula paralelogramului care ne da raspunsul firesc pentru forma geometrica : P1+P2=P (fig.17)

Adunarea impedantelor



si observind egalitatea triunghiurilor hasurate obtinem usor regula de adunare a impedantelor in forma complexa:

(16) $x = x_1 + x_2$

$y = y_1 + y_2$ asadar :

$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Aceasta este regula de adunare a numerelor complexe, careia ii corespunde geometric regula paralelogramului, trigonometric adunarea sinusoidelor si fizic inserierea impedantelor !

10. Forma algebrica si trigonometrica

Daca in relatia evidenta :

$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1)$ se face notatia (17) $(1,0) = 1$ (unitatea pe Ox)

$(0,1) = j$ (unitatea pe Oy)

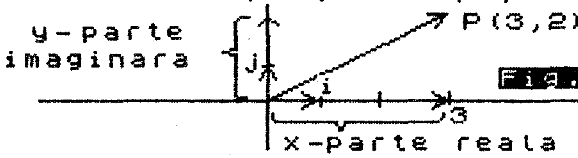


Fig.18

obtinem : (18) $(x,y) = x + yj$ care este forma algebrica de reprezentare a impedantei complexe, cea mai raspindita in lucrarile de electronica.

In aceasta forma regula de adunare se prezinta:

(19) $(x_1+y_1j) + (x_2+y_2j) = (x_1+x_2) + (y_1+y_2)j$

(se aduna partile reale si partile imaginare)

O ultima forma utila a impedantei complexe rezulta din aplicarea formulelor (11) si (12).

(20) $Zc=x + yj=(A\cos\varphi) + (A\sin\varphi)j = A(\cos\varphi+\sin\varphi j)$ (forma trigonometrica a numarului complex).

Forma trigonometrica are un dublu avantaj:

-scoate in evidenta marimile A si φ cu semnificatiile fizice cunoscute

-ofera valorile $x=A\cos\varphi$ si $y=A\sin\varphi$ avantajoase pentru efectuarea sumelor.

OBS: -Reamintim ca $j=(0,1)$ este numar complex, reprezentind unitatea de masura pe axa imaginara

-In continuare vom releva semnificatia fizica a marimilor x si y si facilitatile de calcul ale formei trigonometrice-polare : A , φ

11. Semnificatii fizice ale coordonatelor

Am obtinut pentru componenete (fig.11b):

a)Rezistenta $Zc = (R,0) = R + 0xj = R$

b)Inductanta $Zc = (0,L\omega)=0 + L\omega j= L\omega j$

c)Capacitatea $Zc = (0,-1/C\omega)=0 - 1/C\omega j=-1/C\omega j$

Exemplele de mai sus sugereaza o interpretare fizica a coordonatelor x si y ale impedantei: *partea rezistiva si respectiv partea reactiva a circuitului;* daca $y > 0$ partea reactiva este de tip inductiv, daca $y < 0$, este de tip capacitiv.

Intuim asadar ca, daca prin masurare (fig.19a) se obtine raspunsul $u(t)= 2\sin(100t+\pi/4)$ la atacul $i(t)=\sin(100t)$ putem parcurge etapele (fig.19):

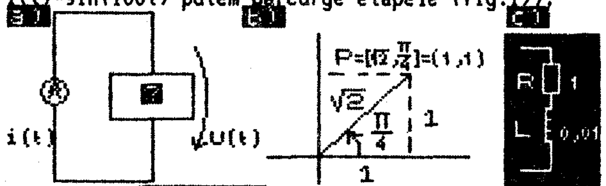


Fig.19 Modelare

Din figura 19b deducem ca circuitul analizat are la frecventa unghiulara 100 impedanta 1+j. Ne putem imagina ca aceasta impedanta rezulta din inserierea unei rezistente de valoare 1 cu o reactanta de valoare 1, propunind modelul din figura 19c.

Asadar R=1, $L\omega=1$ de unde Lx100=1 si L=0,01

Modelul propus este valabil pentru ω =100 dar nu putem fi siguri de valabilitatea sa in cazul atacului cu un curent sinusoidal de alta frecventa ! Putem verifica experimental validitatea modelului in diverse situatii, sau descoperi necorespondente intre rezultatul masurat si cel calculat pe baza lui. Sa discutam aceste doua alternative:

A) Rezultatul experimental (la alta frecventa) nu coincide cu cel dedus din model. Inseamna ca in interiorul "cutiei negre" situatia electrica e mai complexa decit modelul propus. Se adauga modelului elemente noi, pina ce se ajunge la un "circuit electric echivalent" , model pe care sa se obtina aceleasi concluzii cu cele aflate experimental.

Aceasta este de fapt maniera in care circuitele fizice, reale sint transpuse in lumea schemelor electrice. Obiectul fizic pe care il numim "Rezistor" sau "Condensator" sau "Bobina" are o realitate complexa si este bine sa il distingeti de notiunile abstracte de "Rezistenta","Capacitate" respectiv "Inductanta". Rezistenta este un model matematic care inseamna : "la atacul i(t) raspunde cu u(t)=Ri(t)". Deci :

Obiect	Rezistor	Bobina	Condensator
Model	Rezistenta	Inductanta	Capacitate

fig. 20

Pentru a sublinia distinctia ilustrata in tabel sa consideram doua exemple:

Exemplul 1: Un rezistor atacat cu $i(t)=\sin\omega t$ raspunde cu $u(t)=R\sin\omega t$ intr-o anumita plaja de frecventa pentru care este valabil modelul rezistenta (fig.21a)

Fig.21

Daca vom lucra insa la frecvente foarte inalte (in practica, selectorul TV este un bun exemplu) detalii fizice nesemnificative la frecvente mici (inductanta terminalelor, capacitatea dintre ele etc.) vor avea o influenta tot mai pronuntata, obligindu-ne sa completam modelul ca in figura 21b. Noul model,mai apropiat de realitate este desigur valabil si in joasa frecventa, dar contributia reactantelor fiind nesemnificativa, vom prefera neglijarea lor pentru simplificarea schemei si implicit a calculelor.

De fapt la frecvente foarte inalte fiecare componenta fizica are un model electric complex si de aceea situatia electrica reala a selectorului este mult mai bogata decit cea indicata de schema electrica de care dispunem.

Exemplul 2: Sa analizam cazul din figura 22

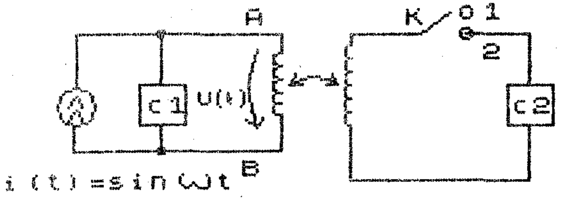


Fig.22

Daca intrerupatorul K este deschis (secundarul transformatorului este in gol) si excitam circuitul primar cu $i(t)=\sin\omega t$ obtinem $u1(t)=A1\sin(\omega t+\varphi 1)$ *deci reprezentarea P1 in planul impedantelor complexe* Inchidem apoi contactul K. Din motive evidente ("secundarul fura energie") circuitul primar va "simti" prezenta circuitului secundar. La acelasi atac de curent masuram la bornele bobinei primar o noua valoare a tensiunii: $u2(t)=A2\sin(\omega t+\varphi 2)$ deci reprezentarea P2 in planul impedantelor complexe (fig.23a).

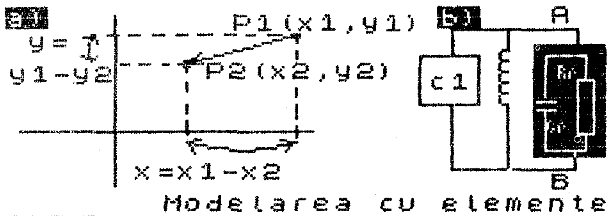


Fig.23 Modelarea cu elemente reflectate

Observam asadar modificarea impedantei la bornele A B si din fig.23a calculam deviatiile: $x1-x2=x$ $y1-y2=y$ produse de interventia circuitului secundar Scaderea valorilor rezistentei si reactantei poate fi modelata (fig.23b) prin introducerea elementelor Rr si Cr in paralel cu modelul circuitului primar izolat Aceste elemente (*capacitatea si rezistenta reflectata*) *modeleaza influenta secundarului asupra primarului*. Desigur este vorba de elemente de circuit (modele), si nu de obiecte fizice !

B) Intr-o plaja de frecventa care *cuprinde zona in care urmeaza sa fie utilizat circuitul* modelul da rezultate satisfacatoare.

Un exemplu de verificare pentru cazul din fig.19a modelat in figura 19c ca urmare a excitarii cu $i(t)=\sin 100t$ (cu rezultatul in fig.19b) se obtine prin excitarea circuitului cu $i(t)=\sin 200t$.

Folosind modelul putem calcula rezultatul :
$u(t)=ur+ul=R\sin(\omega t)+L\omega\sin(\omega t+\pi/2)=$
$=\sin(200t)+2\sin(200t+\pi/2)=\sqrt{5}\sin(200t+1,107)$

Putem folosi formalismul complex pentru a ajunge mai usor la acest rezultat (evitam astfel calcularea sumei sinusoidelor) - fig.24.

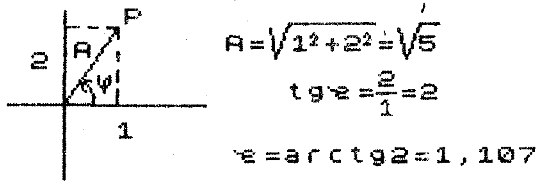


Fig.24

Deci : $Z=Zr+Zl=R+(\omega L)j=1+2j$ adica punctul P care are modulul $\sqrt{5}$ si faza $\mathrm{arctg}2=1,107$

Nu ramine decit sa efectuam experienta atacului cu $i(t)=\sin(200t)$ si sa verificam raspunsul anticipat prin calcule: $u(t)=\sqrt{5}\sin(200t+1,107)$, pentru a valida modelul in cazul atacului cu $\omega=200$.

Continuind aceasta verificare pentru alte frecvente vom *compara rezultatul experimental cu cel calculat* pe baza modelului (fig.25)

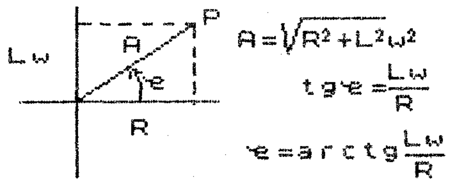


Fig.25

Obs. Masuratorile vor fi facute numai in plaja de frecvente in care va fi utilizat efectiv circuitul.In afara ei iesirea realitatii din cadrul modelului nu ne deranjeaza !

12. Admitanta complexa; inversarea unui numar complex

Consideratiile anterioare pot fi reluate cu totul analog *(dualitate)* pentru cazul in care se considera atacul in tensiune si raspunsul in curent:

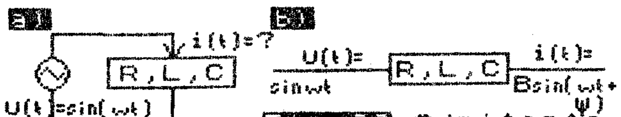


Fig.26 Admitanta

In acest caz raspunsul in curent este tot sinusoidal avind modificarile B (de amplitudine) si ψ (de faza), deci tot o modificare de tip complex.

Ansamblul $Y=[B,\psi]$ este numit *admitanta complexa* a circuitului.

Vom regasi si pentru admitante cele cinci forme de reprezentare :

(23) $Y=[B,\psi]=Q=(x,y)=x+yj=B(\cos\psi+\sin\psi j)$

dar semnificatiile fizice vor diferi.

Exemple: ($u(t)=\sin(\omega t)$)

a)rezistenta $i(t)=1/R\sin\omega t$ $\quad Y=[1/R,0]=(1/R,0)$

b)inductanta $i(t)=1/L\omega\sin(\omega t-\pi/2)$ $Y=[1/L\omega,-\pi/2]=$
$=(0,-1/L\omega)$

c) capacitate $i(t)=C\omega\sin(\omega t+\pi/2)$ $Y=[C\omega,\pi/2]=$
$=(0,C\omega)$

Analizind figura 27 ne putem incadra in cazul atacului de tensiune sau de curent obtinind :

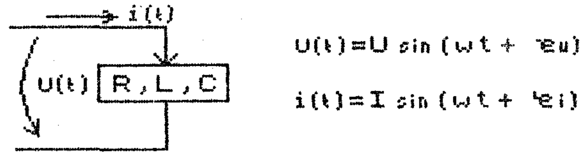


Fig.27

pentru impedanta X: $A=U/I$ $\quad \varphi=\varphi_u-\varphi_i$

pentru admitanta Y: $B=I/U$ $\quad \psi=\varphi_i-\varphi_u$

Din aceste relatii deducem regula:

(24) $B=1/A$ si $\psi=-\varphi$

Asadar admitanta are ca modul inversul modulului impedantei si are faza cu semn opus.

Introducind in multimea numerelor complexe operatia de *inversare* dupa regula:

(25) $1/Z=1/[A,\varphi]=[1/A,-\varphi]$, putem enunta : *admitanta complexa este inversa impedantei complexe*

$Yc=1/Zc$

Utilitatea practica a notiunii de admitanta se dovedeste in cazul legarilor in paralel,datorita calculelor simple la care conduce.

Intr-adevar urmarind fig.28

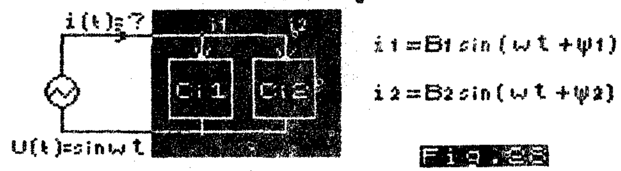


Fig.28

in care deducem :

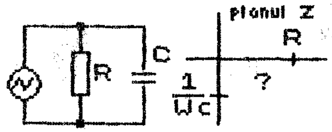
(26) $i(t) = i1+i2 = B1\sin(\omega t+\psi 1)+B2\sin(\omega t+\psi 2)$

Am vazut insa ca acestei insumari trigonometrica ii corespunde operatia de adunare a numerelor complexe. Asadar : admitanta ansamblului paralel este egala cu suma admitantelor.

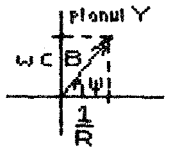
(27) $Y = Y1+Y2 \qquad [B,\psi] = [B1,\psi 1] + [B2,\psi 2]$

Exemplu:

Fie circuitul RC paralel din fig.29



$Z = Z_R || Z_C = \frac{Z_R Z_C}{Z_R+Z_C}$



Avem insa:

$Y_R = \frac{1}{R} \quad Y_C = j\omega C$

$Y = Y_R + Y_C = \frac{1}{R} + j\omega C$

Deci $B = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \omega^2 C^2} \qquad tg\psi = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = R\omega C$

Fig.29

deducem ca raspunsul circuitului este :

(28) $i(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \omega^2 C^2}\, \sin(\omega t + arctg\, \omega C R)$

de unde rezulta pentru impedanta :

$A = \frac{1}{B} = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} \qquad \varphi = -\psi = -arctg\, CR$

asadar la un atac in curent i(t)=sin(t) circuitul raspunde :

(29) $u(t) = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} \sin(\omega t - arctg\, \omega C R)$

Observatii: formulele obtinute releva comportarea circuitului RC paralel in regim sinusoidal (filtru, defazor, etc)

13. Factor de amplificare complex.

Inmultirea impedantelor.

Un alt caz in care ne intereseaza relatia intre o sinusoida de iesire si una de intrare este acela al amplificatoarelor (fig.30)

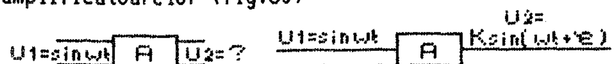


Fig.30

Vom presupune si de aceasta data situatia de liniaritate, asadar ca raspunsul u2(t) la atacul sinusoidal u1(t) este tot o sinusoida.

Grupul [K,φ] care exprima modificarea sinusoidei va fi numit acum *coeficient complex de amplificare*. Semnificatii fizice: K - factor de amplificare (>1) sau atenuare (<1) φ - avans (>0) sau intirziere (<0) de faza

Daca realizam un lant (cascada) de amplificatoare (fig.31)

Amplificatoare in cascada

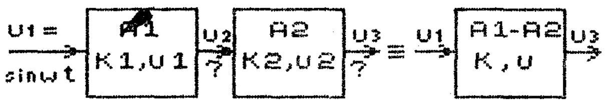


Fig.31

si *asiguram conditia de independenta (separare) a celor doua etaje* (in practica legarea etajelor poate conduce la o modificare a comportarii lor fata de situatia in care lucreaza separat) este firesc sa deducem raspunsul :

(30) $u2(t) = K2(K1\sin(\omega t+\varphi 1+\varphi 2))$

Asadar factorul de ampitudine este egal cu produsul factorilor iar faza totala e egala cu suma fazelor (amplificarile se inmultesc si intirzierile se sumeaza) .

Definim regula de inmultire a numerelor complexe astfel incit propozitia de mai sus sa capete forma *factorii complecsi de amplificare se inmultesc in cazul legarii in cascada.*

Este evident ca pentru aceasta trebuie sa adoptam regula de inmuitire a numerelor complexe:

(31) $[A1,\varphi 1] \times [A2,\varphi 2] = [A1 \times A2, \varphi 1+\varphi 2]$

De aici rezulta urmatoarele reguli de inmultire pentru celelalte forme de scriere a numarelor complexe: trigonometrica (32) si algebrica (33) :

(32) $[A1(\cos\varphi 1+j\sin\varphi 1)] \times [A2(\cos\varphi 2+j\sin\varphi 2)] = A1xA2\ (\cos(\varphi 1+\varphi 2)+j\sin(\varphi 1+\varphi 2))$

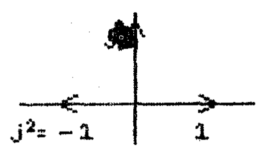
(33) $(x1+y1j)(x2+y2j) = x1x2 + y1y2jj + x1y2j + y1x2j$

Relatiile de mai sus indica faptul ca forma polara - trigonometrica este avantajoasa pentru inmultire, in timp ce cea algebrica prezinta avantajul simplitatii pentru calcule de sume.

Sa mai remarcam faptul ca:

(34) $jj = [1,\pi/2][1,\pi/2] = [1,\pi] = (-1,0) = -1$

Fig.32



$A1 \cdot A2 = 1 \cdot 1 = 1$

$\varphi 1 + \varphi 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

=> $j^2 = -1$

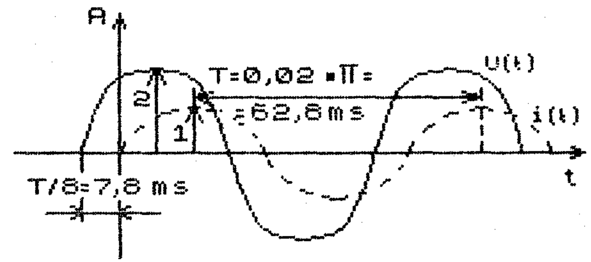
pe care introducind-o in 33 obtinem :

$(x1+y1j)(x2+y2j) = (x1x2-y1y2) + j(x1y2+y1x2)$

Asadar numarul complex j (unitatea pe axa imaginara) are proprietatea ca $j^2=-1$ *datorita modului de definire a numerelor complexe.* De aceea se poate inlocui $-j$ cu $1/j$ si impedanta unui condensator ia forma: $Zc = 1/j\omega C$ in loc de $-j/\omega C$

14. Exercitiu.

Urmarind figura de mai jos in care este reprezentat punctat atacul unui circuit RLC cu un generator de curent i(t) si cu linie continua raspunsul sau sinusoidal de tensiune u(t):



sa se precizeze:

a) frecventa f si frecventa unghiulara ω de lucru

b) modulul impedantei circuitului la aceasta frecv.

c) faza impedantei

d) *rezistenta echivalenta ; reactanta echivalenta*

e) cu modelul serie stabilit la punctul (d), care trebuie sa fie raspunsul la atacul $i(t) = \sin(200t)$?

f) daca la un atac $i(t) = \sin(400t)$ circuitul raspunde cu $u(t) = 4\sin(400t+1,5)$ este valabil modelul propus pentru ω=400 ?

g) admitanta echivalenta a circuitului pentru frecventa de lucru reprezentata in figura

* * *