Se observă că:

- dacă Z și C sunt cu elemente suficient de mici, β este indefinită când α este indefinită

Dar aceasta pretinde un h suficient de mic, ceea ce ar putea influența negativ întregul proces (mărirea calculului). Teoremele din paragr. precedent, vor depăși acest impas. <u>În anumite condiții ele ne vor asigura că, oricând α are o soluție unică, la fel are și β</u>! (<u>indiferent de mărimea pasului</u>).

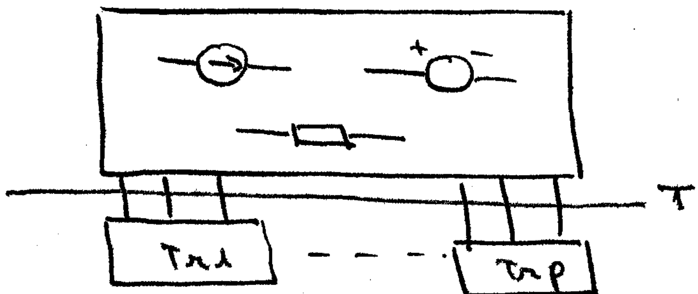
Toate aspectele urmărite la acest punct puteau fi deduse prin simpla particularizare a teoremelor din paragraful următor. Am intrat însă în detalii tocmai pentru a ușura acomodarea cu aceste teoreme și a le sublinia aplicabilitatea.

3 <u>Obținerea ecuației diferențiale în formă normală, pentru un circuit cu tranzistoare</u>

Se pornește de la modelul Gummel al tranzistorului -pag 71-. Pentru început, să considerăm clasa particulară a circuitelor, <u>formate numai din tranzistoare, elemente liniare și surse independente reglate</u> (<u>Clasa 1</u>)

Această clasă poate apare de exemplu în cazul circui ciclele de comutație, la care frecvența" fiind mare, vor conta numai condensatoarele joncțiunilor. Deci

1. Clasa I (Circ. de comutație)



— fig 10 —
„Clasa I)"

Varianta 1

Vom scrie pentru fiecare tranzistor:

$$i_1 = \frac{d}{dt}\left[c_1 v_1 + z_1 f_1(v_1)\right] + f_1(v_1) - \alpha_r f_2(v_2)$$
$$i_2 = \frac{d}{dt}\left[c_2 v_2 + z_2 f_2(v_2)\right] - \alpha_f f_1(v_1) + f_2(v_2) \qquad (92)$$

sau cu $i = (i_1, \dots, i_{2p})^t$ $\quad v = (v_1, \dots, v_{2p})^t$ (93)

(94) I.C.C. $\boxed{f_k(v_k) \text{ funcție } \in C^1,\ f_k(0) = 0,\ f_k \text{ strict crescătoare}}$

și $F = \left[f_1(v_1) \dots f_{2p}(v_{2p})\right]^t$ (95')

$$c_k(v_k) = c_k v_k + z_k f_k(v_k) \qquad (95)$$

$$c = \left[c_1(v_1), \dots, c_{2p}(v_{2p})\right]^t \qquad (95')$$

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p \ (96) \quad \text{cu} \quad T_k = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r^k \\ -\alpha_f^k & 1 \end{pmatrix} \ (96')$$

Avem:

$$\boxed{i = \frac{d}{dt}\left[c(v)\right] + T F(v)} \qquad (97)$$

(restricția reactivă) — neliniară

Partea liniară oferă relația:

$$\boxed{i' = G v' - B(t)} \qquad (98)$$

relația oglindă: $\boxed{i' = -i \quad v' = v}$ (99) Deci:

$$(100) \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left[c(v)\right] + T F(v) + G v = B(t) \qquad t \geq 0}$$

adică forma normală a ecuației difer. a circuitului.

(b) Varianta 2

Dacă luăm în considerație modelul Gummel lărgit (adică prez. rez. de contact) se obține la fel : (v și cap IV):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[C(v)\right] + \tau F(v) + (i+GR)^{-1} G\, C^{-1}(x) = B(t)} \quad (101)$$

unde $R = R_1 \oplus R_2 \ldots \oplus R_p$ cu $R_k = \begin{pmatrix} r_e^k + r_b^k & r_b^k \\ r_b^k & r_b^k + r_c^k \end{pmatrix}$ (102)

Putem considera că această formă (101) e generală, dacă punem $\boxed{r_e^k, r_b^k, r_c^k \geq 0}$ (102'), cazul „=" ducând la (100)

Ultima ecuație mai poate fi scrisă :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[C(v)\right] + \tau F(v) + \hat{G}\, C^{-1}(u) = B(t)} \quad (103)$$

în care
$\hat{G} = G$: model simplu
$\hat{G} = (i+GR)^{-1} G$: model lărgit.

(Vezi acum descrierile de la pag 269 privind relația dintre ecuațiile:

(103)' $\tau F(v) + Gv = A$

(104)'' $\tau F(v) + (i+GR)^{-1} G = A_1$

care dau punctele singulare a celor două ecuații)

2. Clasa 2. (generală)

(c) În sfârșit cazul mai general când sunt prezente condens., bobine, diode și tranzistori poate fi rezolvat numeric.

Astfel, pentru dioda folosim ipoteza standard (pag 48), de modele :

$$i_d = \frac{d}{dt}\left[C_d\, v_d + \tau_d\, I_d(v_d)\right] + I_d(v_d) \qquad (105)$$

q — presupunem q diode —

Pentru condensatori:

$$\frac{d}{dt}\left[C_{2p+q+k}(v_{2p+q+k})\right] = i_{2p+q+k} \qquad (106)$$

(presupunem r condensatori — care pot fi și neliniari), cu condiția ca $c(0)=0$ și $c: \mathbb{R} \xrightarrow{pe} \mathbb{R}$, $\in C^1$ și e strict crescătoare)

Pentru bobine:

$$\frac{d}{dt}\left[L_{2p+q+r+k}(i_{2p+q+r+k})\right] = v_{2p+q+r+k} \qquad (107)$$
$k=1,\dots s$

(presupunem s bobine, de același tip cu condensatorii)

Acum putem scrie ecuațiile reactive:

$$(108)\quad \left|\begin{array}{ll} i = \frac{d}{dt}\left[C(v) + T F_1(v)\right] & \text{— pentru primii } 2p \text{ indici} \\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{C}(v)\right] + \tilde{T}\tilde{F}(v) & \text{— pt următorii } q \text{ indici} \\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{C}}(v)\right] + \tilde{\tilde{T}}\tilde{\tilde{F}}(v) & \text{— pt următorii } r \text{ indici} \\ v = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{\tilde{C}}}(i)\right] + \tilde{\tilde{\tilde{T}}}\tilde{\tilde{\tilde{F}}}(i) & \text{— pt următorii } s \text{ indici} \end{array}\right.$$

Vom nota variabilele:

$$(109)\quad \left|\begin{array}{ll} X_{1,\dots 2p} = i_{1,\dots 2p} & Y_{1,\dots} Y_{2p} = V_{1,\dots} V_{2p} \\ X_{2p+1,\dots 2p+q} = i_{2p,\dots 2p+q} & Y_{2p+1\dots} Y_{2p+q} = V_{1,\dots} V_{2p+q} \\ X_{2p+q+1,\dots 2p+q+r} = i_{2p+q,\dots 2p+q+r} & \dots \\ X_{2p+q+r+1,\dots 2p+q+r+s} = v_{2p+q+r+1,\dots} v_{2p+q+r+s} & Y = i_{(2p+q+r+1,\dots 2p+q+r+s)} \end{array}\right.$$

și iată acum notații pentru relația 108:

$$i_d = \frac{d}{dt}\left[C_d\, v_d + \tau_d\, I_d(v_d)\right] + I_d(v_d) \qquad (105)$$

pen — presupunem q diode —

Pentru condensatori:

$$\frac{d}{dt}\left[C_{2p+q+k}(v_{2p+q+k})\right] = i_{2p+q+k} \qquad (106)$$

(presupunem F condensatori — care pot fi și neliniari), cu condiția ca $c(0)=0$ și $c : \mathbb{R} \xrightarrow{pe} \mathbb{R}$, $\in C^1$ și e strict crescătoare)

Pentru bobine:

$$\frac{d}{dt}\left[L_{2p+q+r+k}(i_{2p+q+r+k})\right] = v_{2p+q+r+k} \quad k=1,\dots s \qquad (107)$$

(presupunem s bobine, de același tip cu condensatorii)

Acum putem scrie ecuația reactivă:

$$\cancel{\frac{d}{dt}[C(v)]} \quad (108)\quad \begin{cases} i_{\cancel{k}} = \frac{d}{dt}\left[C(v_{\cancel{k}}) + TF_1(v_{\cancel{k}})\right] & \text{— pentru ramurii de la } 2p \text{ incolo}\\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{C}(v)\right] + \tilde{T}\tilde{F}(v) & \text{— pt următorii q noduri}\\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{C}}(v)\right] + \tilde{\tilde{T}}\tilde{\tilde{F}}(v) & \text{— pt următorii r noduri}\\ v = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{\tilde{C}}}(i)\right] + \tilde{\tilde{\tilde{T}}}\tilde{\tilde{\tilde{F}}}(i) & \text{— pt următorii s noduri} \end{cases}$$

Vom renota variabilele:

$$(109)\quad \begin{cases} x_{1,\dots 2p} = i_{1,\dots 2p} & y_1,\dots y_{2p} = v_1,\dots v_{2p}\\ x_{2p+1,\dots 2p+q} = i_{2p,\dots 2p+q} & y_{2p+1}\dots y_{2p+q} = v_1,\dots v_{2p+q}\\ x_{2p+q+1,\dots 2p+q+r} = i_{2p+q,\dots 2p+q+r} & \dots\dots\\ x_{2p+q+r+1,\dots 2p+q+r+s} = v_{2p+q+r+1,\dots 2p+q+r+s} & y = i_{(2p+q+r+1,\dots 2p+q+r+s)} \end{cases}$$

și iar avem notații pentru relația 108:

$$\boxed{x = \frac{d}{dt}\left[\bar{c}(y)\right] + \bar{T}F(y)} \quad (110)$$ rețea reactivă

unde, x, y au sensul din 109 iar evident

$$(111)\quad \left|\begin{array}{ll} \bar{c}(y) = c(v) = c_j v_j + z_j t_j v_j & : j = 1 \dots 2p+ \\ \bar{c}(y) = \tilde{c}(v) = c_j v_j' + z_j t_j v_j' & : j = 2p+1 \dots 2p+q. \\ \bar{c}(y) = \tilde{\tilde{c}}(v) = c_j(v_j) & : j = 2p+q+1, \dots 2p+q+r \\ \bar{c}(y) = \tilde{\tilde{\tilde{c}}}(i) = L_j(i_j) & : j = 2p+q+r+1, \dots 2p+q+r+s \end{array}\right. \quad (111)$$

și ~~$T = T_1 \oplus T_2 \dots \oplus T_p$~~

$$\bar{T} = T_t \oplus T_d \oplus T_c \oplus T_b \quad (112)$$

$$(112)\quad \left\{\begin{array}{l} T_t = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p \\ T_d = i_q \\ \cancel{T_c = T_b = 0} \quad T_c = 0_r \\ \qquad\qquad\quad\; T_b = 0_s \end{array}\right.$$

(sau $T_c = i_r$, $T_b = i_s$ ca în exemplul nostru, având grijă ca $\tilde{\tilde{F}}, \tilde{\tilde{\tilde{F}}}$ să fie nule)

$$(113)\quad \left\{\begin{array}{ll} \bar{F}(y) = F_j(v_j) = k_j(v_j) & : j = 1 \dots 2p \\ \quad = \tilde{F}(v) = k_j(v_j') & j = 2p+1, \dots 2p+q \\ \quad = \tilde{\tilde{F}}(v) = \text{oarecare (de exemplu } 0) \text{ pe } j \geq 2p+q & \\ \quad \text{(se reduce din } T) & \end{array}\right. \quad (113)$$

Observând că în condițiile cerute, toate funcțiile din (111) admit inversă, există o aplicație diagonală $\bar{c}^{-1}$ ai

$$\boxed{c(y) = u \Rightarrow y = c^{-1}(u)} \quad (114')$$, deci

$$(114)\quad \boxed{x = \frac{d}{dt}[u] + \bar{T}\,\bar{F}(\bar{c}^{-1}(u))} \quad (114)$$ „rețea neliniară - reactivă"

În rețelele unde evident că prezența bobinelor pare să fie necesară, caracterul părții liniare cu a metrice hibridă H (care variabile x sunt 2p+q+r curenți și s tensiuni). Deci

(115) $\boxed{X' = \bar{H} y' + B}$ (B ∈ mulțimea funcțiilor mărginite și continue ale timpului)

(116) Acum, cu puțină atenție la schimbarea anumitor semne din capetele lui H, relația oglindă:

rel. oglindă (116)

$$\begin{cases} x_j = -x'_j & (j = 1 \ldots 2p+q+r) \\ x_j = x'_j & (j = 2p+q+r+1, \ldots 2p+q+r+s) \\ y_j = y'_j & (j = 1, \ldots 2p+q+r) \\ y_j = -y'_j & (j = 2p+q+r+1, \ldots 2p+q+r+s) \end{cases}$$

ceea ce face să obținem

$$\boxed{X^* = -\bar{H} y^* + \bar{B}} \quad (117)$$

(118)
$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & -H_{12} \\ -H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{B} = \begin{bmatrix} -B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

(s-au ilustrat sch. de semn necesare în H și B)

Acum relațiile (114) și (117) dau:

$$\boxed{\frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{T}\bar{F}[\bar{C}^{-1}(\bar{u})] + H\bar{C}^{-1}(\bar{u}) = B} \quad (119)$$

Adică și pentru acest caz foarte general am obținut ecuația diferențială în formă normală. (Desigur, atunci când există o matrice G, (H), care dă influența buclelor de condensatori)

Dacă nu există G(H) trebuie procedat

- ori se adaugă mici elemente (pe considerente fizice) (v. art [8])
- ori se folosește formalismul lui Bellevitch (VB)

(4) Teoreme privind ecuațiile obținute (reg. staționar)

Teorema 1 Ecuația 100 (101) are ~~exactă și~~ o soluție unică, continuă pentru $t \geq 0$, oricare ar fi condițiile inițiale $u(0) = u_0$ și $B(t)$ regulată.

Demonstrație (v. și par 2)

Calculul Jacobianului duce la

$$J_u^t = T \operatorname{diag} \frac{f'_i[g_i(u_i)]}{c_i + z_i f'_i[g_i(u_i)]} + G \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{c_i + z_i f'_i[g_i(u_i)]} \right\} \quad (120)$$

unde $g_i(u_i) = [c^{-1}(u)]_i$.

și se arată imediat că $\|J_u\|$ e uniform mărginită în R^{2p} superior

Drept urmare:

$$\|TF(c^{-1}(u_a)) + G c^{-1}(u_a) - TF c^{-1}(u_b) - G c^{-1}(u_b)\| \leq L \|u_a - u_b\| \quad (121)$$

de unde se deduce imediat (cond. Lipschitz e îndeplinită) valabilitatea teoremei 1.

Teorema 2 Dacă ecuația (100) are în plus proprietatea că $(G, T) \in \mathcal{D}^1$ adică ~~sau că~~ $\exists d_1, \dots d_p > 0$ a.î.

$$\alpha_t^{(k)} < \frac{d_{2k-1}}{d_{2k}} < \frac{1}{\alpha_r^{(k)}} \quad (122')$$

și ~~dc~~ $D = \operatorname{diag}(d_1 \dots d_p)$ e a.î. DG e tare dominantă pe coloane. Atunci din:

$$\begin{cases} \dfrac{du_a}{dt} + TF[c^{-1}(u_a)] + G c^{-1}(u_a) = B_a(t) & t \geq 0 \\ \dfrac{du_b}{dt} + TF[c^{-1}(u_b)] + G c^{-1}(u_b) = B_b(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (122)$$

și $B_a, B_b \in \mathcal{B}$ (fct. continue mărginite în timp) ~~atunci din~~ și $B_a(t) - B_b(t) \to \Theta$ pentru $t \to \infty$, deducem că $[u_a(t) - u_b(t)] \to \Theta$ pe $T \to \infty$.

Corolar 1

În aceleași condiții ca T2, dacă $(\overline{T}, G) \in \mathcal{D}'$ și $\exists$ un B_∞ a.î. $[B(t) - B_\infty] \to \theta$ pt $t \to \infty$, atunci există un u_∞ a.î. $[u(t) - u_\infty] \to \theta$ pt $t \to \infty$, u_∞ este independent de condiții inițiale u_0. $\boxed{\text{Dacă } B_\infty = \theta \to u_\infty = \theta.}$

Teorema 2' Dacă $(\overline{T}, H) \in \mathcal{D}'$ și $\overline{u}a, \overline{u}b$ sunt soluții ale ecuației (119) sunt valabile aceleași concluzii ca la T2

Corolarul 1' : Analogul lui 1 pentru ecuația 119.

Următoarele două teoreme ~~tratează~~ găsesc o estimare (~~simplă în~~ printr-un calcul simplu - algebric + inegalități de mai larg) a timpului de comutare a circuitelor. Astfel, se consideră îndeplinite condițiile corolarului 1, și se urmărește a se da o majorare și o ~~minorare~~ pentru timpul în care 1 circuitul „comută" din starea lui inițială ~~în~~ starea u_∞, (pentru B_∞). Desigur că în problemele curente, relațiile ce urmează vor fi folosite, chiar de exemplu ca răspunsul să se apropie până la K% (98% de exemplu) de cel staționar.

Teorema 3 În condițiile corolarului 1, $t \geq 0$

$$(123) \quad \boxed{\sum_{1}^{2p} d_j |u_j(t) - u_{j\infty}| \leq \exp(-\underline{K}t) \sum_{j=1}^{2p} d_j |u_j(0) - u_{\infty j}|}$$

în ~~care~~ relație, $d_1, \ldots d_{2p}$ există, dacă ~~$\overline{T}$~~ $G \in \mathcal{D}(\tau)$ (pot fi chiar cele din definiție), iar numărul $\underline{K}$, care se calculează ~~după~~ după relația (124) va ~~fi~~ putea și <u>notăm</u>, pt anumiți d_i luând > 0.

$$(12^1)\quad 0 < \underline{K} = \min_j \min\left\{\frac{1}{T_j}\left(1 - \tilde{d}_j d_j^{-1} \alpha_j\right), \frac{1}{c_j}\left(g_{jj} - \sum_{i \neq j}' d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\} \quad (124)$$

unde $\tilde{d}_j$ $\begin{cases} d_{j+1} & \text{pt } j \text{ impar} \\ d_{j-1} & \text{pt } j \text{ par} \end{cases}$

- α_j <u>elementul</u> ~~nenul~~ din afara diag. în col j

Teorema 4 Tot în condițiile ~~teoremei~~ Cor 1, pentru orice alegere a ctelor $d_j = 1 \ldots 2p$

$$(125)\quad \sum_{j=1}^{2p}{}' d_j |u_j(t) - u_{*j}| \geq \exp(-\overline{K} t) \sum_{j=1}^{2p} d_j |u_j(0) - u_{*j}| \quad t \geq 0 \quad (125)$$

unde

$$\overline{K} = \max_j \max\left\{\frac{1}{T_j}\left(1 + \tilde{d}_j d_j^{-1} \alpha_j\right), \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^{2p} d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right\} \quad (125')$$

(cu aceleași explicații de mai sus).

Teorema 5 În condițiile corolarului 1'

$$(126)\quad \sum d_j |\overline{u}_j(t) - u_{*j}| \leq \exp(-\underline{K} t) \sum' d_j |\overline{u}_j(0) - \overline{u}_{j*}| \quad t \geq 0 \quad (126)$$

unde $0 < \underline{K} < \min\{\underline{K}_1, \underline{K}_2, \underline{K}_3\}$

$$(127)\quad \begin{cases} \underline{K}_1 = \min\limits_{1 \leq j \leq 2p} \min\left\{\frac{1}{T_j}\left(1 - \tilde{d}_j d_j^{-1} \alpha_j\right), \frac{1}{c_j}\left(g_{jj} - \sum\limits_{i \neq j}' d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\} \\ \underline{K}_2 = \min\limits_{2p+1 \leq j \leq 2p+q} \left\{\frac{1}{T_j}, \frac{1}{c_j}\left(g_{jj} - \sum\limits_{i \neq j}' d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\} \\ \underline{K}_3 = \min\limits_{2p+q \leq j \leq 2p+q+r+s} \left\{\frac{1}{s_j}\left(g_{jj} - \sum\limits_{i \neq j}' d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\} \end{cases} \quad (127)$$

cu $s_j = \begin{cases} \sup c'_j & \text{pt } j = 2p+q+1, \ldots 2p+q+r \\ \sup L'_j & \text{pt } j = 2p+q+r+1 \ldots 2p+q+r+s. \end{cases}$

Teoremele care urmează stabilesc câteva din rezultatele care s-au obținut în analiza formulelor de integrare multipunct (dacă la ptul 2) (v pag 394)

Se ~~calculeaza~~ pornește de la calculul Jacob. ecuației ~~formulei de integrare~~ (101) de ex: (sau 120 pe ~~ex~~ 100)

$$(128)\quad J_u = T \operatorname{diag}\left\{\frac{f'_j(g_j(u_j))}{c_j + z_j f'_j(g_j(u_j))}\right\} + (I+GR)^{-1} G \operatorname{diag}\frac{1}{c_j + f'_j(g_j(u_j)) z_j}$$

adică o matrice de forma

$$T D_1 + (I+GR)^{-1} G D_2 \qquad (129)$$

~~(la ex. de exemplul din ptul 2, T este ... de ...~~

(Luăm de exemplul de la ptul 2, avem $D_1, D_2 > 0$ ($f_j \neq 0$) și se stabilește rezultatul:

$\boxed{\text{Teorema 6}}$ Dacă $\exists$ o matrice diag $D > 0$ a.î.

1) DT e stabilă pe col

2) $D\hat{G}$ e stab. pe coloană

$(D(I+GR)^{-1}G)$, sau DG - pentru 100)

(101)

atunci $\forall D_1, D_2 > 0$, Jacobianul ~~din~~ cu expresia (129) are toate zerourile în semiplanul drept strict.

Observații 1) ca o consecință anumite formule de integrare numerică vor fi stabile.

2) In exemple am utilizat o variantă a T6

Pentru subclasa formulelor de integrare numerică implicite:

$$(130)\quad Y_{n+1} + h b_{-1}\{T F[c^{-1}(Y_{n+1})] + (I+GR)^{-1} G c^{-1}(Y_{n+1})\} = g_n$$

se fac calcule analoage celor de la pag 396.

~~Rezultatele NO~~ Dintre rezultatele foarte care se stabilesc (menționez că acestea sunt mult mai tari) este următoarea

$\boxed{\text{Teorema 7}}$ Dacă $\left| \begin{array}{l} T^{-1}G \in P_0 \text{ pentru } \text{orice } \alpha_i, \alpha_1 \in (0,1) \\ \det G \neq 0 \end{array} \right.$

atunci

(131) $$\boxed{\left[T + h b_{-1} T\right]^{-1}\left[C + h b_{-1}(i + GR)^{-1} G\right] \in P_0} \quad \forall h > 0$$

și în consecință, formula 130 e bine definită (la fiecare pas există o soluție unică).

~~Teorema 8~~ (Legătura între formulele de integrare și Jacobian):

(se împarte rel. de mai sus 130 cu hb_{-1} ⇒)

$$\Rightarrow \frac{1}{hb_{-1}} y_{n+1} + TF(C^{-1}(y_{n+1}) + \hat{G}\, C(y^{n+1}) = \varepsilon^{1}$$

(132) $$\boxed{\frac{1}{hb_{-1}} = z} \quad (132)$$

(133) ⇒ Ecuația ~~...~~:

$$\boxed{z\, y_{n+1} + TF[C^{-1}(y_{n+1})] + \hat{G}\, C(y^{n+1}) = \varepsilon^{1}} \quad (133)$$

a cărei Jacobian Jglobal este

(134) $$\boxed{J_g = z\, i + J_n} \quad (134)$$

Așa că dacă facem $y_{n+1} = C(u_{n+1})$, teorema de mai sus va apare legată liniar de ~~ca o consecință formală a~~ teorema lui Palais:

$\boxed{\text{Teorema 8}}$ $$(\sigma z + T)^{-1}(zG + \hat{G}) \in P_0$$

dacă $\det(\sigma i + J_n) \neq 0$ (135)

Consecință:

$\det(\sigma i + J_n) \neq 0$, ⇒ ecuația (130) are o soluție unică.

Acum mai mult, se poate impune ca $\det(\sigma i + J_n) \neq 0 \ \forall \sigma > 0$, deci ca J_n să nu aibă valori proprii reale, oricare ar fi $h>0$ $\left(h < \frac{1}{\sigma b_{-1}}\right)$ (133).

în semiplanul stâng. Deci:

Teorema 9 Dacă J_u nu are valori proprii reale și în semiplanul stâng, atunci formula de integrare implicită are întotdeauna o soluție unică (la fiecare pas) (am folosit afirmația la pctul 2)

Pornind tot de la * concepția de convergență s-a arătat că:

Teorema 10 Dacă $\det(I + h b_{-1} J(y_{n+1})) \neq 0 \;\; \forall y_{n+1}$, atunci există algoritmi convergenți la soluția ecuației 130 (de tip Newton de ex).

În sfârșit pentru cazul formulei particulare:

(136) $y_{n+1} = y_n + h\hat{y}_{n+1}$ $\quad (a_0 = b_{-1} = 1,\; a_k = b_k = 0,\; k = 1 \ldots r)$

care duce în mod firesc la:

(137) $\boxed{y_{n+1} + h\{T F[C^{-1}(y_{n+1})] + G C^{-1}(y_{n+1})\} = y_n + h B_n}$

cu $B_n = B[(n+1)h]$ (138)

și să presupunem că, dacă nu putem face calculele exacte ci determinăm un șir y_{n+1} aî (139) $\|D(\hat{y}_n - y_n^*)\|_1 \le \varepsilon \;\; \forall n, 1$ (133)

(140) $\boxed{y^*_{n+1} + h\{T F[C^{-1}(y^*_{n+1})] + G C^{-1}(y^*_{n+1})\} = \hat{y}_n + h B_n}$ (140)

valoare calculată

Dacă presupunem că la fiecare pas satisfacem (139) pt eroarea locală, atunci:

(Eroarea de normă $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ calculată și în t. anterioare)

Teorema 11 Există o ctă pozitivă $\delta(c_i, z_i, T, G, D)$ a.î.

$$\| D(y - \hat{y}_n) \|_1 \le (1+\sigma h)^{-n} \| D(y - \hat{y}_0) \|_1 + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} (1+\sigma h)^{-k} \quad n \ge 1$$

(unde $\hat{y}_0$ e o aprox. a lui y_0)

De astfel încât DT, DG sînt tari dominante pe col)

Consecință: Dat fiind $\rho > 0$, $\forall h > 0$ putem să alegem un $\varepsilon > 0$ a.î. $\| y_n - \hat{y}_n \|_1 \le \rho$ pentru $n \ge 1$.

(„~~stingerea~~ stingerea erorilor")

În sfîrșit, teorema ce urmează se ocupă cu relația dintre ecuația difer. originală și cea algebrică adaptată pt calculul numeric. Se arată că

Teorema 12 Dacă, T, D sînt a.î. DT, DG sînt tari dom. pe coloane pentru o anumită matrice diag $D > 0$, $B(t)$ este C^1 în $t: [0, \infty)$ și atît el cît și $\frac{\partial B}{\partial t}$ sînt mărginite pe $[0, \infty)$ $\dot{\xi}_i(0) = 0$, ~~$\xi(t)$~~ ξ_i, v_i definite ~~...~~ adecvat și

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + TF[c^{-1}(u)] + G[c^{-1}(u)] = B(t) & t \ge 0. \\ y_{n+1} + h\{TF[c^{-1}(y_{n+1})] + G\, c^{-1}(y_{n+1})\} = y_n + h\, B[(n+1)h] & n \ge 0 \end{cases}$$

atunci $\exists$ ~~...~~ $\sigma, \varepsilon > 0$ ~~a.î.~~ independente de h a.î.:

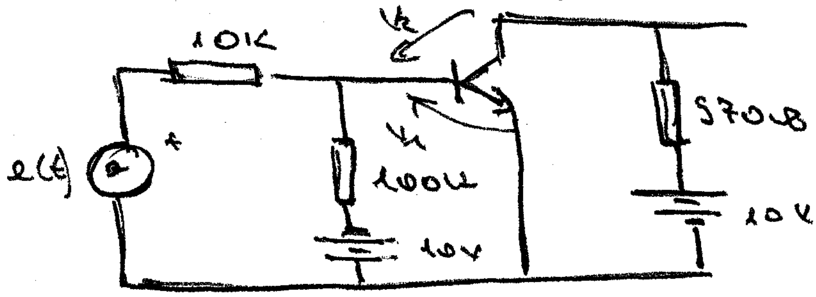
$$\boxed{\| D(u_n - y_n) \| \le (1+\sigma h)^{-n} \| D(u_0 - y_0) \| + \varepsilon h}$$

$\forall n \ge 1$ $\qquad (u_n = u(nh))$

~~Aplica~~

(5) Calculul timpului de comutare cu formula 123 / T 3

In ~~[...]~~ [art 12] se porneşte de la circuitul:



- fig. 11 -
- circuit practic de inversare logică.

Unde $\begin{cases} \alpha_f = 0.968 \\ C_e = 2\times 10^{-12} F \\ \alpha_r = 0.583 \end{cases}$ $\tau_e = 1{,}7 \cdot 10^{-10} s$

$C_c = 1{,}7 \cdot 10^{-12} F$

$\tau_c = 2{,}62 \times 10^{-8} s$

$$G = \begin{bmatrix} 1{,}1886 \times 10^{-3} & -1{,}01215 \times 10^{-3} \\ -1{,}01215 \times 10^{-3} & 1{,}01215 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

(care au fost incluse şi rez. de bază de 280Ω şi $r_c = 130Ω$)

Se presupune circ. iniţial în starea stabilă

$e(t) = 0.3V$ pt $t<0$. Pt $t \geq 0$ $e(t) = 10V$ şi pt $t \to \infty$

$u(t) \to u_\infty$ (vector ct).

Relaţia de determinare a lui k, ~~...~~ devine:

(124):

$$k = \min\left\{ \frac{1}{\tau_e}(1 - d_2/d_1 \alpha_f),\ \frac{1}{C_e}(g_{11} - d_2/d_1 |g_{12}|),\right.$$

$$\left.\frac{1}{\tau_c}(1 - d_1/d_2 \cdot \alpha_r),\ \frac{1}{C_c}(g_{22} - d_1/d_2 |g_{21}|)\right\}$$

Sau pentru $d_2 = 1$, k e minimul din următoarea serie de 4 numere:

$$\begin{cases} 0.58\,(1 - 0.968 d_1^{-1}) \times 10^{10} \\ 0.5\,(1{,}1886 - 1{,}01210 d_1^{-1}) \times 10^{9} \\ 0.3815\,(1 - 0.583 d_1) \times 10^{8} \\ 0.58\,(1.01215)(1 - d_1) \times 10^{9} \end{cases}$$

$\underline{K} > 0$ fiind minimul dintre ele, toate evaluările să fie pozitive deci $\boxed{0.968 < \alpha_1 < 1}$ (<)

Căutând minimele maxime ale celor 4 ~~expresiilor~~ expresii scrise cu respectarea condiției (α), găsim valoarea cea mai bună pentru α_1 : 0.9709 (care maximizează minimul global al celor 4 expresii) Aceasta este un calcul f simplu executabil fiind de ordin 1.

Pt acest α_1, $\underline{K} = 1{,}66 \times 10^7$

Acum, dacă vrem să vedem „timpul de comutare" t_0, să-l definim de exemplu ca acea valoare luată a lui t ai $|u_1(t) - u_{\infty 1}| + |u_2(t) - u_{\infty 2}|$ este $\leq 2\% \cdot \{|u_1(0) - u_{\infty 1}| + |u_2(0) - u_{\infty 2}|\}$. pt $t \geq t_0$.

Relația (123) cu $\underline{K}$ calculat mai sus ne dă $t_0 \cong 241$ ms, o majorare destul de bună (calculul exact dă 57 ms) având în vedere simplitatea cu care este obținută!