

(C) Aspecte legate de tratarea vectorială

(1) Generalități

Dreptic de la sfârșitul paragrafului precedent a re-
gret că nu ne putem continua inversiunea în lumea co-
ordonatelor neliniare multipart, lară a face apel la veci-
tari n -dimensionali de forma:

$$(41) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)^{\text{tr}} = \text{Mat} (x_1 \dots x_n)^{\text{t}}$$

și la funcții f , de variabile vectoriale, cu valori veci-
tionale:

$$(42) \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ mai explicit: } \begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_n) = y_2 \\ \dots \\ f_m(x_1 \dots x_n) = y_m \end{cases}$$

Acest fapt pare a ridica gradul de dificultate al
problemei și here ca teoria care urmează să aplice
la un întreg complex (definiții, termeni, teoreme, metode)
specifice analizei în spațiul \mathbb{R}^n . O listă a unor lu-
crări îngrijite (o de ex [14] cap V, VI din vol I) va elimina
insă eventualele neclarități. Mai mult, va apare
evident că multe din unele rezultate sînt generalizări
freschi (uneori chiar triviale) a unor aspecte întilnite
în analiza spațiului unidimensional \mathbb{R} , al numerelor

reale. Deci nu vom insista asupra acestor aspecte, considerăm utilă în acest punct enumerarea (fără remarci) a acestor chestiuni care vor însoți celelalte lucrări în cadrul lor general, pentru (odine) cadrul calculului în \mathbb{R}^n .

② Spațiul vectorial normat \mathbb{R}^n

În primul rând, pe mulțimea \mathbb{R}^n , a tuturor vectorilor de forma (41) se introduc operațiile de adunare, și înmulțirea cu scalari, care îl organizează ca spațiul vectorial, cu proprietățile de rigoare. Ulterior elementele sunt surprinse în relațiile:

$$(43) \quad x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases} \quad (43') \quad (x + y) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad (43'') \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Elementul unitate este:

$$(43''') \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ și sunt valabile operațiile enunțate.}$$

Apoi, se introduce:

norma : $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietățile

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = \Theta \\ \| \lambda x \| = |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{ineq. triunghiulară}) \end{array} \right.$$

Exemple de norme

(45) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (norma euclidiană)

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Legat de aceasta se introduce și norma unei matrici, definită prin (v. [2] cap 1 pt. detalii) :

dacă există K at :

(46) $\|Ax\| \leq K \|x\| \quad \forall x$, atunci,

$\|A\| = \inf K$ (cea mai mare limită inferioară)

Derivăm că putem defini norme de vectori sau orice și diferite norme de matrici (v [2] pag 47)

De asemenea se mai introduce :

distanța $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile :

(47) $d(x, y) \geq 0$ și $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

$d(x, y) = d(y, x)$

$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

un exemplu $d(x, y) = \|x - y\|$

produsul scalar

(48) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} :$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = x \cdot y^T$

introducerea normei în spațiul vectorial normat \mathbb{R}^n , deci transformarea lui într-un spațiu vectorial normat

permite definierea noțiunilor specifice analizei. (re-
definirea o topologie, cu noțiuni specifice ca: veci-
nătate, mulțime deschisă, mulțime închisă, punct de
acumulare, frontieră etc).

Se vor introduce aici seriile în \mathbb{R}^n și proprie-
tățile lor. \Rightarrow Să remarcăm proprietățile ca:

Spațiul \mathbb{R}^n este un spațiu complet, adică orice

șir Cauchy ($|x_n - x_m| < \epsilon$, pe $m, n > N(\epsilon)$), este un șir
convergent ($|x_n - a| < \epsilon$ pe $n > N(\epsilon)$ și un limită a). \Rightarrow

această proprietate se va dovedi foarte utilă în cazul
algoritmilor de calcul bazati pe teorema lui Banach
(aproximării fixe al contractiei)

Exemple de vecinătăți în \mathbb{R}^n :

una: $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < k\}$ (de radii k , deschisă)

(49)

„paralelipipedul
 n -dimensional”

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k \in [a_k, b_k], k=1 \dots n\}$

(închis)

③ Funcții vectoriale de variabile vectoriale

Am forma din relația (42)

Derivăm că se pune și pentru ele tot felul
de probleme clare:

- injectivitatea ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

surjectivitatea ($\forall y, \exists x$ cu $f(x) = y$)

bijectivitatea = inject. + surj. Să reamănim că,

dacă funcția $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este bijectivă, atunci
(=x) (=y)

există o inversă $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, cu proprietate-

ea că $f(f^{-1}(y)) = y$ $f^{-1}(f(x)) = x$.

P: De acum încolo e util să mai lăsam legătura care există între aceste proprietăți și ecuația:

$$\underline{f(x) = a} \quad (x, a \in \mathbb{R}^n) \quad (50)$$

Este evident că

| | |
|--|-------------------|
| f injectivă \Rightarrow ecuația are cel mult o soluție | } E → (50') |
| f surjectivă \Rightarrow -"- o cel puțin o soluție | |
| f bijectivă \Rightarrow -"- o soluție, unică | |

În schimb, reciprocule relațiilor E nu sînt neapărat adevărate (pentru un a e posibil ca ecuația să aibă o soluție fără ca f să fie surjectivă etc)

Reciprocule dintr-una sînt adevărate, dacă formularea este oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^n$

| | |
|--------------------|--------------------------------------|
| } E → (50'') | ecuația are ^{max} o soluție |
| | -"- minim |
| | -"- unică |

(Am lăsat aceste precizări pentru a nu mai fi nevoit să menționez fiecare dată)

monotonie - nu are sens în \mathbb{R}^n , decât dacă se în-
 troduce în mod expres o anumită relație de ordine.
 Generalizări ale monotoniei duc însă la rezultate u-
 tile [art 22], care nu vor fi revăzute aici.

④ Elemente de analiză în \mathbb{R}^n

O dată introduse funcțiile și topologia, se ur-
 mare aspectele clasice (limite de funcții, continui-
 tate, derivata parțială a funcției componente a lui k
 față de fiecare variabilă etc)

Cea ce dorim să menționăm în mod expres este
 rolul jacobian al Jacobienul funcției $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 rol într-un fel analog cu derivata funcției de
 o variabilă într-un punct. Pentru detalii și
 reguli de calcul vezi [1] cap V, și vol I. Aici voi
 reda forma sa:

$$\begin{aligned}
 \boxed{J_f} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\
 \text{(51)} & \quad \text{(matricea} \\
 \text{Jacobiana)} & \quad \text{)} \\
 & \quad \text{ } x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^+ \\
 & \quad \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det J_f \\
 & \quad \text{(Jacobienul)} \\
 & \quad \text{(51')}
 \end{aligned}$$

~~Determinarea~~
4) Jacobianul în acest punct este diferit de 0. (v. 54)

$$\det J = \frac{D(F_1 \dots F_m)}{D(x_1 \dots x_m)} \Big|_c \neq 0. \quad (55)$$

Concluzii :

a) într-o anumită vecinătate a punctului c , rețeaua (53) definește $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ ca funcții de x_1, \dots, x_m :

$$(56) \begin{cases} \gamma_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \gamma_2 = f_2(x_1, \dots, x_m) \\ \dots \\ \gamma_m = f_m(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

b) Pentru $x_1 = x_1^0, \dots, x_m = x_m^0$ aceste funcții dau respectiv valorile v_1^0, \dots, v_m^0

c) funcțiile f_1, \dots, f_m sînt continue

d) cu derivate parțiale continue în raport cu toate argumentele ($f_i \in C^1$)

Observații

a) teorema subliniată conține real local al acestui teoremă (alfel tare). Se verifică existența funcțiilor f_1, \dots, f_m bine definite doar într-o vecinătate a punctului $c(x_1^0, \dots, x_m^0)$

Încercările de a "prelungi" funcțiile f_k definite implicit la întreg spațiul S - cu două deosebiri de diferențe. Totuși, în ultimul timp S - cu înregistrat câteva rezultate foarte puternice (v. pt. 7)

b) Demonstrația teoremei este la fel ca prin inducție.
Tot prin inducție se stabilește și rezultatul :

Corolar 1 Dacă adăugăm la cerințele teoremei 5
ipoteza suplimentară

5) $F \in C^k$ (cu k derivativate parțiale continue până la
ordinul k inclusiv), atunci avem
concluzia suplimentară

2) f_i din 5b, $\in C^k$

6) Teorema de inversiune locală

Pentru a obține din teorema 1, teorema de inversiune
locală a funcțiilor $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de tipul

$$(57) \quad f(x) = y \quad \text{sau}$$

$$(57') \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

(această scriere este în esență ecuația $f(x) = y$
sau căutăm o ~~unică~~ soluție unică - \forall rel $E - (50)$)

vom face în prealabil unele transformări :

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0 = F_1(x_1, \dots, x_n, \underline{y_1}, \dots, y_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) - y_2 = 0 = F_2(x_1, \dots, x_n, \underline{y_1}, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0 = F_n(x_1, \dots, x_n, \underline{y_1}, \dots, \underline{y_n}) \end{cases} \quad (58)$$

Scrierea în forma (58), este clară și aparent mai

complicată (- introducând dependenți ipotetice inverse.
 (alte) - care să putem lua direct T^{-1} , cu variabile
 x_1, \dots, x_n în loc de y_1, \dots, y_m
 y_1, \dots, y_m în loc de x_1, \dots, x_n . Obținem:

Teorema 2' - Teorema inversei locale
 - varianta 1 -

ipoteze:

1) Dacă funcțiile din sistemul (58) sunt definite și con-
 tinuе în paralelipipedul dreptunghi

$$D' = [y_1^0 - \delta_1, y_1^0 + \delta_1, \dots, y_m^0 - \delta_m, y_m^0 + \delta_m; x_1^0 - \delta_1', x_1^0 + \delta_1', \dots, x_n^0 - \delta_n', x_n^0 + \delta_n']$$

cu centrul în punctul c' : $(y_1^0, \dots, y_m^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$

2) Punctul c' verifică (58)

3) $F \in C^1$ (pentru toate argumentele) în D'

4) $\det \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$ în punctul c' .

Concluzii

a) Într-o anumită vecinătate a punctului c' siste-
 mul (58) definește x_1, \dots, x_n ca funcții de y_1, \dots, y_m , uni-

vare:

$$(59) \begin{cases} x_1 = k_1'(y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_n = k_n'(y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

b) Pentru $y_1 = y_1^0, \dots, y_m = y_m^0$, aceste funcții iau res-
 pectiv valorile x_1^0, \dots, x_n^0

c) $k_1', \dots, k_n' \in C^1$

Observație

Analizăm forma particulară a funcțiilor F din (58), vedem că derivabilitatea față de y_1, \dots, y_m este asigurată. În plus Jacobianul din (58) nu va depinde de variabilele y . De aceea condițiile 1-4 pot fi puse direct în termenii funcțiilor inițiale f și se ajunge la forma normată (standard) a teoremei de inversare locală

Teorema 2

- teorema de inversare locală
- varianta standard -

ipoteze

- 1) Funcțiile f_1, \dots, f_m din (57) sunt definite și continue în paralelipipedul:

$$D = [x_1^0 - \Delta_1', x_1^0 + \Delta_1', \dots, x_n^0 - \Delta_n', x_n^0 + \Delta_n']$$
 cu centrul în punctul $C [x_1^0, \dots, x_n^0]$
- 2) Punctul $C' [x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0]$ verifică ecuația (57)
- 3) $f \in C^1$
- 4) $\det J_f = \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$ în punctul C .

Concluzii

Există ca la T2', într-o anumită vecinătate a punctului $C'' (y_1^0, \dots, y_m^0)$

ca și la T1 avem concluzia:

Corolar 2

Dacă adăugăm la T2

ipoteze suplimentare

b) $f \in C^k$, atunci avem

concluzia suplimentară

d) $f' \in C^k$

Observație

Se remarca din nou caracterul local al teoremei, care arigera existența a clasei vecinătăți $V(y_0)$ și $V(y_0)$ ai $f|_{U(x_0)} \rightarrow V(y_0)$ (restricția lui f la aceste vecinătăți) este bijectivă. (A atare surse o inversă $f^{-1}: V(y_0) \rightarrow U(x_0)$ (care ne referă numai la acele clase vecinătăți). - nimeni nu ne arigera că ne mai surse în x_0' ai $f(x_0') = y_0$ și din nou două vecinătăți $U'(x_0')$, $V'(y_0)$ corespunzătoare.

Este însă clar că interesul nostru ar fi să avem teoreme care să ne arigera posibilitatea inversării globale, adică a bijectivității, sau în termenii (50), că $\forall y$, ecuația $f(x) = y$ are o soluție, unică.

De aceea s-a făcut un însamnat fapt pentru a obține un fel de rezultat.

7) Teoreme de inversiune globala

a) Introducere

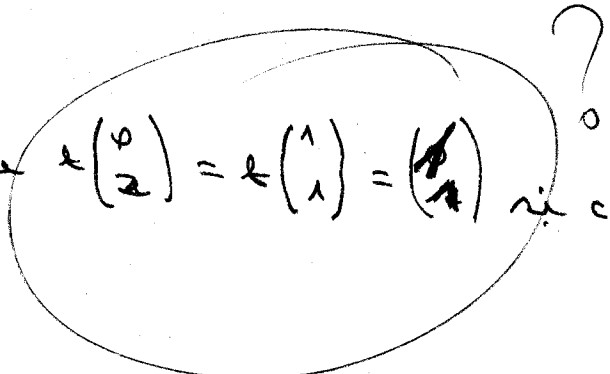
in paragraful anterior am anticipat necesitatea generalizării unor metode care să ne asigure de posibilitatea inversiunii globale a unei funcții $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

O prima metodă ar fi să putem controla injectivitatea și surjectivitatea lui f . De exemplu,

funcția :

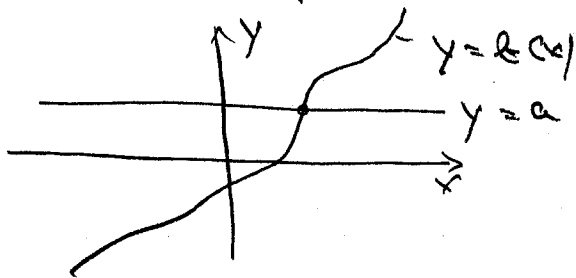
$$f = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 1 \\ \lg_2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

are $f \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și ca urmare



nu este injectivă.

In general însă va fi extrem de dificil să stabilim pentru o problemă concretă dacă f este injectivă și mai ales surjectivă. Să remarcăm că, pentru cazul unidimensional, chiar dacă ecuația ilustrată în figură :



- fig 2.1 -

nu poate fi rezolvată exact, putem răspunde ușor la întrebări calitative cum ar fi : existența sau unicitatea soluției (surjectivitate - respectiv injectivitate).

Pe cazul nelinier n -dimensional însă, acest lucru este dificil (nu mai avem de exemplu nici o imagine grafică)

De aceea, o teoremă care, pornind doar de la existența ecuației $f(x) = y$ să ne asigure existența unei soluții unice (inversă globale) ar fi deosebit de puternică și de utilă.

Lucrările apărute în ultimul timp [art 1-23] punere totmai de la cîmpul de teoremă, pe care le văi reda fără demonstrație (v. [0])

Pentru început avem nevoie de câteva definiții.

1^o, care ne vor simplifica enunțurile ulterioare.

Pentru ca aceste definiții să apară mai lîngă voi învece să le mai transparente caile pe care se poate ajunge la ele.

Anticipînd rezultatele din cap \bar{N} , \bar{Y} , pornim de la observația că, pentru obținerea formei normale a ecuațiilor diferențiale ce caracterizează un circuit în regim staționar vor trebui inversate anumite funcții, pentru a face ca unele variabile (de ex. variabil rezistiv) să fie scoase din anumite relații implicite, funcții de stare de stare (de ex

tensiunea pe condensatori). Deci din relații de lar-

$$f(i_R, v_C, i_L, v_C) = x \implies \begin{cases} i_R = f^{-1}(i_L, v_C) \\ v_C = f^{-1}(i_L, v_C) \end{cases} \text{ (de ex).}$$

(61)

Aceste funcții vor fi introduse în ecuația de
diferențială a circuitului care va căpăta forma:

$$(62) \quad \dot{x} = F(x, t) \quad x - \text{vector de stare}$$

În acest moment, pentru a putea aplica o teo-
remă privind existența (unicitatea etc) soluțiilor
ecuațiilor diferențiale (62) va fi în general necesar
ca funcția F și o dată cu ea funcțiile care o compun
să satisfacă anumite condiții (continuitate, Lipschitz
apartenență la C^k etc). Pentru funcțiile care intervin
în F apar încă și f^{-1} și de aici se vede că ar fi util,
atunci când rezolvăm ecuații de forma (61) să pu-
tem spune mai multe despre soluțiile lor - conti-
nități, derivabilitate etc.

La aceasta voi mai adăuga că, teoremele
de inversare locală care sînt folosite de obicei
pentru obținerea celor de inversare globală,
are și ele ca ipoteză, și apoi ca concluzii a-
numite proprietăți ale funcțiilor f și f^{-1} (conti-
nuitate etc). Și pentru aceasta se lucră mai

listele numelor de definiții:

b) Definiții

Definiția 1 Se numește homeomorfism global (pe) o

funcție $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu proprietățile:

- 1) f continuă
- 2) f bijectivă \rightarrow există o inversă globală f^{-1}
- 3) f^{-1} e continuă

Definiția 2 Se numește homeomorfism local (pe) o

funcție $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu proprietățile:

- 1) f e continuă (de fapt rezultă din 2)
- 2) $\forall x_0$, dacă $f(x_0) = y_0$, atunci există două

vecinătăți deschise $U(x_0), V(y_0)$ ai $f|_{U(x_0)} \rightarrow V(y_0)$ este

un homeomorfism pe

Definiția 3: Se numește difeomorfism de ordin k

global ("k-difeomorfism pe "), o funcție care, pe

ține propriu. 1) 2) 3) de la D1 are și:

- 4) atât f cât și $f^{-1} \in C^k$

Definiția 4: Se numește difeomorfism de ordin k local ("k-difeomorfism pe ") o funcție care

pe ține propriu de la D3, mai exigent pentru

existența $f|_{U(x_0)}$ și pentru $f^{-1}|_{V(y_0)} \rightarrow U(x_0)$ aparținând

la C^k .

Aplicatie

incant lineari, daca in teorema 2 de inversiune
arigeram independenta tuturor conditiilor (inclusiv
det J $\neq 0$) pentru toate punctele lui R^n , atunci parcedi-
repectul D devine R^n iar teorema devine la:

Teorema 3 (teorema homeomorfismului local)

ipoteza : In relatia $t(x) = y$, functia t satisface

- 1) $t \in C^1 \quad \forall x \in R^n$
- 2) $\det J = \det \frac{D(t_1, \dots, t_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad \forall x \in R^n$

Concluzii

Functia t este un homeomorfism local, mai mult,
un "difeomorfism local"

~~Daca~~ Din Corolarul 2 se obtine

Teorema 4 Daca pe elga 1) 2) in TB avem

ipoteza suplimentara

- 3) $t \in C^k \quad \forall x \in R^n$

Concluzie

t este un difeomorfism de ordin k (local)
(k difeomorfism local).

Observatii

1) Acesta teoreme dau conditii suficiente, nu necesare
pentru ca t sa fie hom. local.

2) În acești termeni (D.1-4) matematicienii au obținut teoremele de inversare globale date în continuare. Fără a lor justificări detaliile făcute în acest paragraf.

(C) Teoreme de inversare globale

Să remarcăm de la început că, în limbajul adoptat, dacă vom demonstra că o funcție f este un homeomorfism global, aceasta va implica bijectivitatea ei, deci:

- că ecuația $f(x) = a$ are o soluție unică
- înțeles $f(x) = y$ are o inversă $f^{-1}(y)$ care este în același timp continuă.

Dacă arătăm, în plus că f este un "K deformație pe" adică automat că $f^{-1} \in C^k$

în spirit, această observație (v.T.5) ne va arăta că $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este un hom. pe o submulțime a mulțimii de

ierire adică $f: \mathbb{R}^n \rightarrow f(\mathbb{R}^n) =$ | vom da dovezi

(= X) (= Y) (deschisă)

(domeniul) (codomeniul)

injectivitatea lui f , sau că ecuația $f(x) = a$ are cel mult o soluție.

Teorema cu care încep este utilă în situații foarte diverse și este enunțată sub numele de Teorema de invariabilitate a domeniului (Telem Branner)

Teorema 5

- t. lui Brower de inv. a domeniului

ipoteze : A e o multime deschisă și $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$

este injectivă și continuă

Concluzie : $f(A)$ e deschisă și f este un homeomorfism (pe $f(A)$)

Teorema 6

(t. fundamentală a hom. global)

Dacă $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, atunci, dacă

- 1) f e un homeomorfism local
- 2) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$

atunci f e un homeomorfism global și reciproc

Observații :

1) Concluzia ramine valabilă și dacă ipoteza 2) este substituie cu 2'), și căci 2' (mai jos) este echivalentă cu 2

2') imaginea inversă prin f a unei mulțimi mărginite este mărginită.

Corolar 6 | $2 \Leftrightarrow 2'$

2) Dacă în general, în cazurile cunoscute condiția 1) e ușor de verificat (v. de ex T4), condiția 2) ridică serioase dificultăți.

Teorema 7

(t. lui Palais) (reține că T_3 și T_6)

Dacă o funcție $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ are proprietățile

1) $f \in C^1 \forall x \in \mathbb{R}^n$

2) $\det Jf \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

3) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$ sau 3') imag. inversă a unui mult. mărginită e mărginită

atunci f e un homeomorfism global pe \mathbb{R}^n

Observații

1) Condițiile teoremei sunt suficiente, nu și necesare pentru a avea oricare homeom. global, așa cum se poate vedea în anumite exemple în care, chiar condițiile ei nu sunt respectate ($\det Jf \neq 0$), putem găsi o funcție inversă continuă prin calculul direct.

2) Teorema este puternică. Pe baza ei pot fi elab. unele multe din teoremele din cap IV ca simple parti. celerizări! (demonstrarea lor devine ușoară în considerabilul apart - v [0], dar are avantajul unei mai bune înțelegeri a situației concrete).

3) Ca un proces al τ și τ_0 obținem și:

(Paley)

Teorema B

Dacă $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface

1) $f \in C^k \forall x \in \mathbb{R}^n$

2) $\det Jf \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

3) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$

atunci f e un \mathbb{R}^k homeomorfism pe "

4) Condiția 3 e diferit de verificat. Deaceia

locuții utile se poate dovedi teorema!

Teorema 9 (de laud.)

Dacă $f \in C^1$ și formăm din

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial k_2}{\partial x_1} & \frac{\partial k_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial k_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial k_m}{\partial x_1} & \frac{\partial k_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial k_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

determinați din primile k linii și k coloane pe care li notăm cu J_k (minori principali). Atunci, dacă există o constantă $\epsilon > 0$ aî

$$(63) \quad \left| \det J_1 \right| \geq \epsilon, \left| \frac{\det J_2}{\det J_1} \right| \geq \epsilon, \dots, \left| \frac{\det J_m}{\det J_{m-1}} \right| \geq \epsilon \quad (L)$$

uniform în x ($\forall x \in \mathbb{R}^n$)

ca condiția de înlocuire

Atunci f e un homeomorfism global pe \mathbb{R}^n

(d) Concluzii

Având rezultate, ca și altele de aceeași factură (v. cel [20, 21, 22]), permit ca să putem răspunde la întrebări privind ecuația:

$$k(x) = a$$

sau la problema în inversă (urmelii):

$$k(x) = y$$

prin simpla expectare a verificării condițiilor din ipotezele lor.

În acest sens, să reținem că T 6, 7, 8, 9 arăsurci în preceț bijectivitatea, iar T 5 injectivitatea, că verificarea T 9 va face ca homeomorfismul global să fie dovedit, și prin aceea, cantare reciproci

teoremei 6; lin $k(x)$ - , care se va fi derivat
"vii" -

relașunt din punctul de vedere "interne marginite
- serie marginite". în acest sens veri și rel(50).
cu derivata aparentă.

Să mai observăm că, atunci când aceste teoreme
se vor putea aplica, obținem automat informații ori-
pro lui f^{-1} (continuitate, C^k), care se vor putea fi
foarte utile (v. derivata de la pag 92).