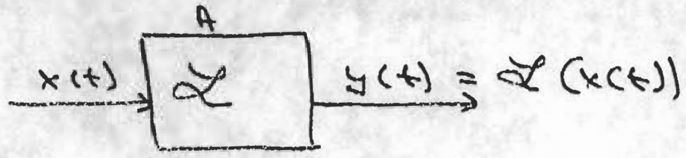
C) Exemplu de prezentare a unei teoreme.

Teoremă : Orice funcţie $f : [a,b] \to R$, continuă este antiderivabilă

1. Cadrul general (aplicativ)

În foarte multe situaţii din tehnică se ajunge la concluzia că un anumit „etaj" (sistem), bloc etc) privit ca un transformator al semnalului „de intrare"



furnizează un semnal „de ieşire", $y(t)$, dependent de evoluţia în timp a intrării şi de particularităţile etajului. La modul general legea de transfer este complexă. Ea poate fi privită ca un operator $\mathcal{L}$ care face corespondenţa

$y(t) = \mathcal{L}(x(t))$ între mulţimea evoluţiilor de la intrare şi de la ieşire.

Un exemplu relativ simplu de astfel de operator este derivarea:

$$y(t) = (x(t))'$$

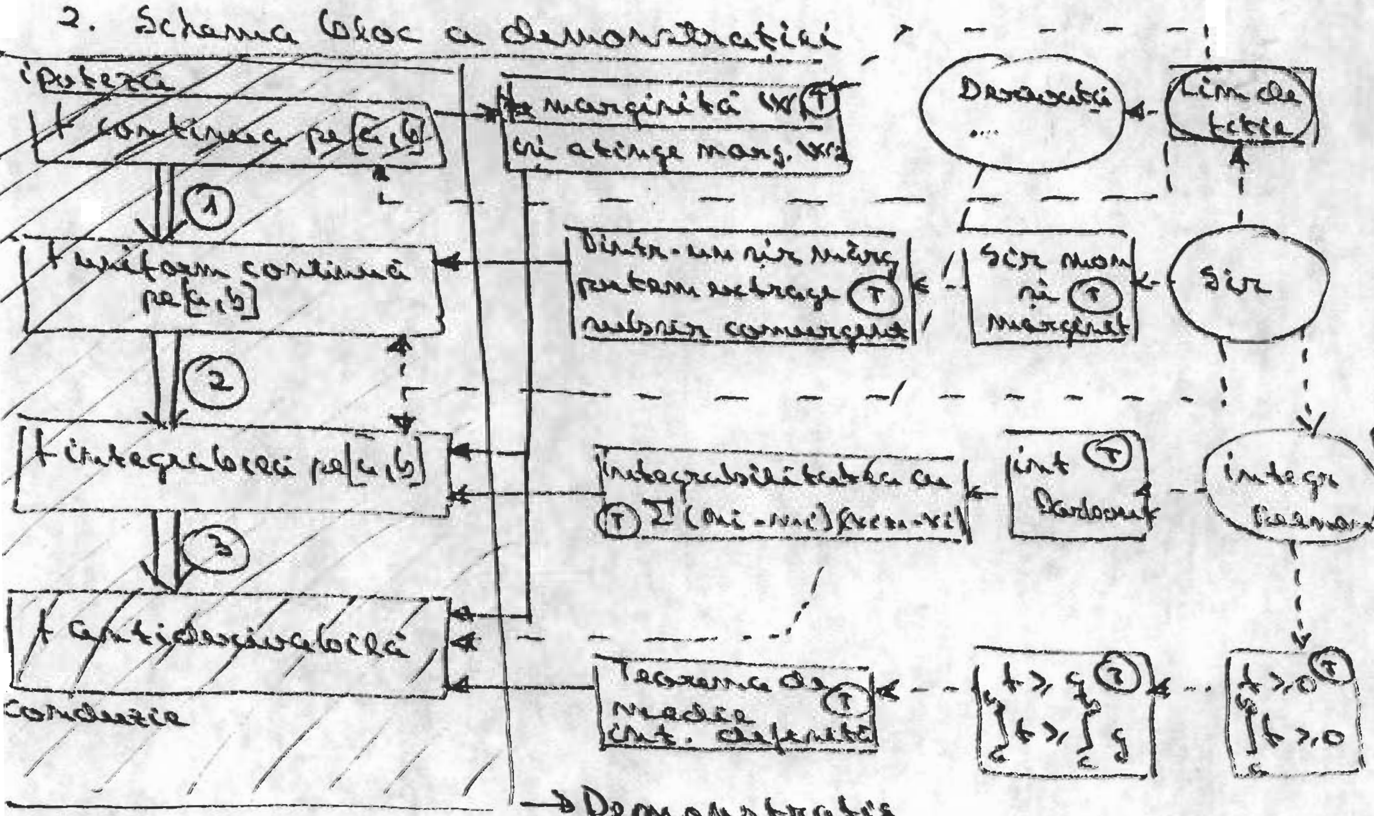
Chiar şi într-un astfel de caz, problema inversării operatorului, adică a găsirii unei legi care să furnizeze răspunsul : ce intrare a putut produce acest răspuns constatat la ieşire este foarte dificilă.

Prezintă interes pentru practică, pe lângă calculul în sine (antiderivarea lui $y(t)$) ~~şi~~ şi elaborarea unor rezultate calitative, care să precizeze măcar anumite proprietăţi ale intrării necunoscute $x(t)$ în cazul în care $y(t)$ are anumite particularităţi.

O întrebare extrem de importantă este dacă antiderivarea e posibilă pentru clasa funcțiilor continue, adică dacă putem fi siguri de existența lui $x(t)$ ași prin derivare să producă o evoluție expresă exclusiv restricției de continuitate.

Răspunsul pozitiv va fi arătat construind efectiv funcția $y(t)$ căutată, adică definind procesul de inversare a operatorului $\mathcal{L}$. Vom afla așadar operatorul $\mathcal{L}^{-1}$ pentru clasa funcțiilor continue, ceea ce practic e esențial!

2. Schema bloc a demonstrației



Ideea principală a demonstrației este:

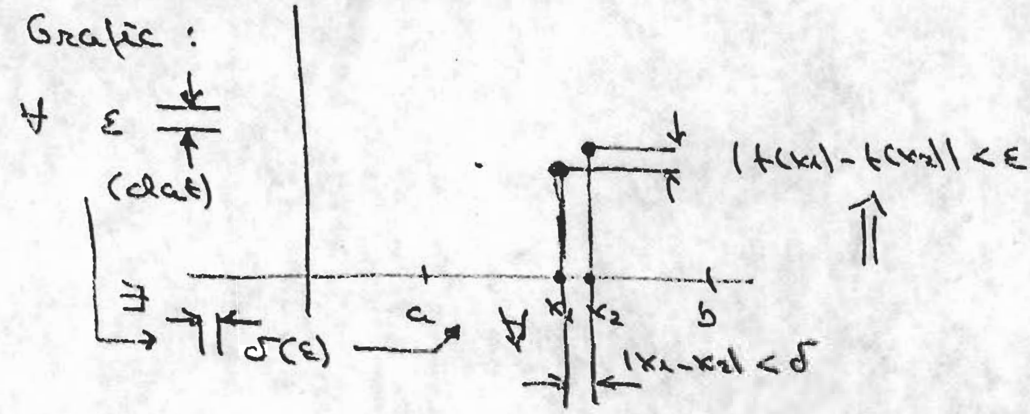
pasul 1: Se arată că dacă o funcție este continuă pe un interval $[a,b]$, putem, pentru un grad de precizie dat pe scara y-ilor, ~~să~~ - fie ε, să găsim o lățime $\delta(\varepsilon)$ pe scara absciselor, astfel încât ~~p~~ apropierea dintre două puncte sub acest prag:

$|x_1 - x_2| < \delta$ să asigure apropierea dintre valorile funcției: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, oricare ar fi poziția exactă a lui x_1 și x_2.

Pe scurt (T. lui Cantor): $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ a.î. pentru $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ a.î. $|x_1 - x_2| < \delta$, avem $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

(uniform continuitate).

Grafic:



Aceasta ne va permite să majorăm oricât de fin $|f(x_1) - f(x_2)|$ cu condiția să asigurăm $|x_1 - x_2|$ suficient de mic.

pasul 2

Pornindu-se de la definiția integralei definite ca limită a șirului de sume Riemann, se ajunge în teoria integralei definite la criteriul de integrabilitate a.î.:

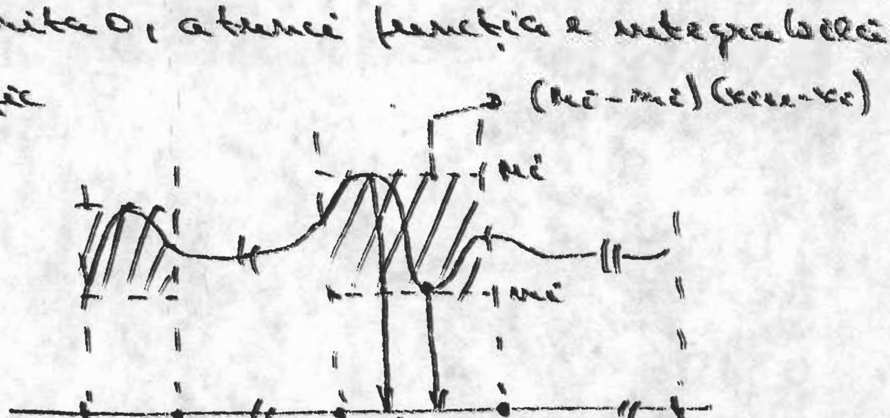
T: Dacă pentru orice șir de diviziuni cu norma tinzând la 0, șirul definit:

$$w_{\Delta n} = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

→ Maximul și minimul lui $f(x)$ pe $[x_i, x_{i+1}]$.

are limita 0, atunci funcția e integrabilă pe $[a,b]$.

Grafic



Deci este evident că, pentru a demonstra faptul că suma devine oricât de mică, ~~este nevoie~~ ne putem ocupa de „înălțimea" dreptunghiurilor a căror arie e adunată.

Pentru a asigura o înălțime sub o valoare dată ε, a tuturor acestor dreptunghiuri, folosim rezultatul precedent, adică găsim acel δ care ne asigură că $|f(\alpha)-f(\beta)|<\varepsilon$ dacă $|\alpha-\beta|<\delta$.

Toate segmentele vor fi cu lățimea sub δ, dacă norma lor: $\|\Delta\|_{div} = \max |x_{i+1}-x_i|$ este aleasă sub δ. Ceea ce e posibil deoarece șirul normelor tinde la 0!

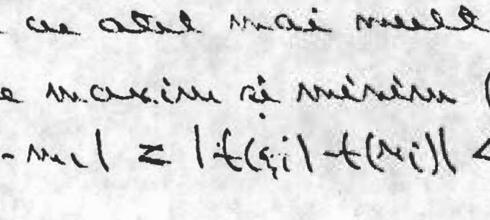
În rezumat: pentru orice ε dat se găsește $\delta(\varepsilon)$ pe care îl garantează uniform continuitatea. Apoi se face norma sub acest prag, ce obligă toate segmentele $|x_{i+1}-x_i|<\delta$, și cu atât mai mult $|\xi_i-\eta_i|<\delta$ (punctele ξ_i și η_i de maxim și minim fiind în interior). Așadar $|M_i-m_i| = |f(\xi_i)-f(\eta_i)|<\varepsilon$ pentru toate dreptunghiurile.

Aria sumei rezultă sub $\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}\text{suma}\\ \text{lățimilor}\end{smallmatrix}\right) = \varepsilon(b-a)$ și tinde evident la 0.

Pasul 3

Pasul precedent poate fi aplicat oricărui segment $[a,x]$ cu $x \leq b$. Are deci sens definirea funcției

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



(aria de sub grafic până la x)

Vom arăta că această funcție este tocmai antiderivata căutată, adică $F'(x) = f(x)$.

Pentru aceasta este aplicată definiția derivatei într-un punct x_0:

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\int_a^x f(x)\,dt - \int_a^{x_0} f(x)\,dt}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0}$$

Rezultatul e obținut acum dintr-o teoremă de medie $\int_{x_0}^x f(t)\,dt = (x-x_0)\cdot K$ cu $K\in[m,M]$ pe intervalul $[x,x_0]$.

3. Indicații orientative

Partea 1 a demonstrației solicită stăpânirea noțiunilor de șir, limită de funcție și continuitate. În mod deosebit este utilizată teorema care asigură că dintr-un șir convergent și mărginit se poate extrage un subșir convergent.

Partea 2 solicită utilizarea criteriului de integrabilitate [illegible], folosirea calculului cu șiruri și utilizează teoremele lui Weierstrass I și II care asigură mărginirea și atingerea marginilor pentru $f(x)$, presupusă continuă.

Partea 3 folosește în primul rând definiția derivatei, proprietățile calculului cu integrale și limitelor de funcții și din nou teoremele lui Weierstrass. În mod special intervine teorema de medie pentru integrala definită.

Teoremele mai sus amintite, pot fi la rândul lor demonstrate folosind căile figurate în tablou.

Părțile 1 și 2 fiind destul de complexe, se poate renunța la demonstrarea lor, mulțumindu-ne cu rezultatul în sine: „f continuă pe $[a,b] \Rightarrow f$ integrabilă" și efectuând doar partea a 3-a, mai simplă și care surprinde ideea de bază.

3. Demonstrație (completă)

partea 1.

Să presupunem (prin absurd) că $f(x)$ nu e uniform continuă. Așadar: (vezi principiile negării (bazei logice))

(1) $\exists \varepsilon$ ai $\forall \delta(\varepsilon)$, $\exists\ x_1, y_1 \in [a,b]$ cu $|x_1 - y_1| < \delta$ și $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

Putem așadar găsi puncte oricât de apropiate, având totuși $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

(2) Vom construi două șiruri de puncte, cât apropiate tot mai tare, două câte două, care corespund acestei situații.

(Obs: introducerea șirurilor se face în speranța folosirii

Alegem așadar un șir de valori pentru δ:

$\delta = 1 \to \exists\ x_1, y_1$ ai $|x_1 - y_1| < 1$; $|f(x_1) - f(y_1)| > \varepsilon$

$\delta = 1/2 \to \exists\ x_2, y_2$ ai $|x_2 - y_2| < 1/2$; $|f(x_2) - f(y_2)| > \varepsilon$

$\vdots$

$\delta = 1/n \to \exists\ x_n, y_n$ ai $|x_n - y_n| < 1/n$; $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$

- - - - . . . .

Deci $(x_n - y_n) \to 0$, nu putem exploata acest lucru, deoarece nu cunoaștem convergența șirurilor x_n și y_n construite. Știm doar că $x_n, y_n \in [a,b]$.

Singurul rezultat de convergență utilizabil este teorema lui Bolzano: Pentru x_n mărginit, există un subșir convergent. (3)

Deci $\exists\ x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0 \in [a,b]$.

Profităm de condiția $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ sau (4)

de observația că $x_{n_k} - y_{n_k} = d_{n_k} \to 0$

$\Rightarrow y_{n_k} = -d_{n_k} + x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0$ (suma limitelor)

In acest moment putem folosi continuitatea! (5)

$x_{n_k} \to x_0 \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$

$y_{n_k} \to x_0 \Rightarrow f(y_{n_k}) \to f(x_0)$ de unde deducem

---

$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \xrightarrow{k} f(x_0) - f(x_0) = 0$ I (6)

Pe de altă parte avem relația

$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon\ \forall k$ II (7)

Relațiile I și II sunt contradictorii. Acest lucru demonstrează absurditatea supoziției inițiale. (8)

Deci $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon)$ ai $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

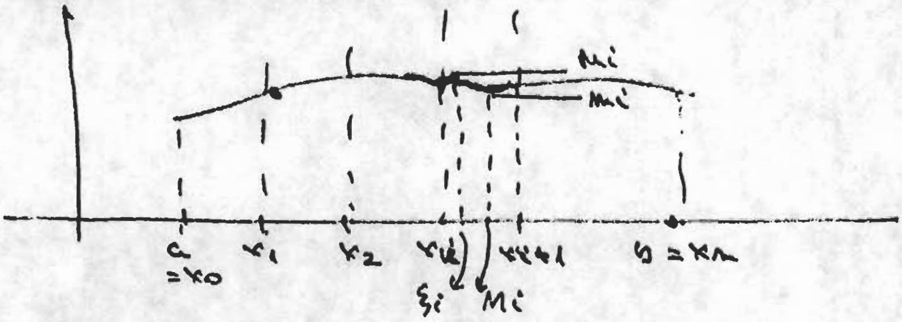
<u>pasul 2</u>

~~$\forall \varepsilon > 0$, alegem~~

Fie un șir de diviziuni a intervalului $[a,b]$ cu norma tinzând la 0. (9)

Calculăm „oscilația" unei diviziuni:

$$\omega_{\Delta_n} = (M_1 - m_1)(x_1 - a) + \dots\dots + (M_n - m_n)(b - x_{n-1})$$



(9) Pentru orice $\varepsilon > 0$ propus, vom găsi $N(\varepsilon)$ a.î. $\omega_{\Delta_n} < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$. În acest fel vom arăta că șirul ω_{Δ_n} are limita 0.

(10) Pentru aceasta, considerăm în prealabil distanța $\frac{\varepsilon}{b-a}$ și găsim δ a.î. pentru $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in [a,b]$ cu $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta$ avem $|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Acest δ există, conform pasului 1.

(11) Vom alege $N(\delta)$ a.î. $\|\Delta_n\| < \delta$ pentru $n \geq N$ (se poate deoarece normele diviziunilor formează un șir convergent la 0 !)

(12) Definiția normei

$$\|\Delta_n\| = \max |x_{i+1} - x_i| \geq |x_{i+1} - x_i| \ \forall i$$

ne asigură că avem

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta \ \ \forall i = 0, 1, \dots n-1$$

(13) Ne vom concentra atenția asupra acelor două puncte din intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ în care funcția își atinge cele două margini. Existența lor e certificată de aplicarea teoremelor lui Weierstrass pentru $f(x)$ continuă, pe $[x_i, x_{i+1}]$.

Deci, există $\xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ a.î. $f(\xi_i) = M_i$ $f(\eta_i) = m_i$

(14) Avem evident $|\xi_i - \eta_i| < |x_{i+1} - x_i| < \delta \ \forall i$

(15) Aplicând așadar proprietatea asigurată prin alegerea lui δ la punctul 10:

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \ \ \forall i$$

(16) Înmulțim aceste relații cu $(x_{i+1}-x_i)$ și le adunăm

$$\cancel{(x_1-a)\frac{\varepsilon}{b-a}}\ (x_1-a)\left[M_1-m_1\right] \le \frac{\varepsilon}{b-a}(x_1-a)$$

$$(x_2-x_1)(M_2-m_2) \le \frac{\varepsilon}{b-a}(x_2-x_1)$$

$$\vdots$$

$$(b-x_{n-1})(M_n-m_n) \le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-x_n)$$

$$\omega_f \le \frac{\varepsilon}{b-a}\left(x_1-a+\cancel{x_2}-\cancel{x_1}+x_3-\cancel{x_2}+\dots+b-x_n\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}}\cdot\cancel{(b-a)}=\varepsilon.$$

(17) Așadar $\forall\, n \ge N(\sigma(\varepsilon))=N(\varepsilon)$, avem pentru $n\ge N(\varepsilon)$

$\omega_{\Delta_n} \le \varepsilon$. Aceasta înseamnă că am demonstrat integrabilitatea.

pasul 3

(18) Raționamentul precedent se aplică și pe un subinterval $[a,x]$ a lui $[a,b]$, așadar, există integrala $\int_a^x f(t)\,dt$.

(19) Observând dependența valorii și de capetele de integrare, construim funcția

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ și vom încerca să arătăm că aceasta e antiderivata lui $f(x)$.

(20) Trebuie deci să demonstrăm derivabilitatea lui $F(x)$, conform definiției. Aceasta ne impune studiul limitei

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

(21) Înlocuind ~~mai~~ obținem

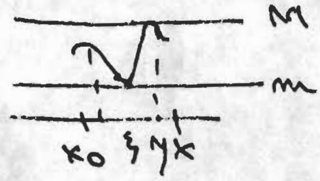
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0}$$

(transformare ce ține cont de relația

$\int_a^c f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt$, în condițiile

existenței tuturor celor trei integrale

(22) Folosind din nou teorema lui Weierstrass, de data aceasta între x_0 și x, avem certitudinea existenței marginilor



$$\underset{f(\xi)}{\overset{\shortparallel}{m}} \le f(t) \le \underset{f(\eta)}{\overset{\shortparallel}{M}}$$

---

(23) Aplicând teorema de medie se obține

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = (x-x_0)\cdot k \quad \text{cu } k \in [f(\xi), f(\eta)]$$

---

(24) de unde

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0} = k \in [f(\xi), f(\eta)]$$

---

(24) Dar pentru $x \to x_0$ intervalul $[x_0, x]$ sau $[x, x_0]$ se reduce la x_0, deci atât ξ cât și η tind la x_0.

De aici deducem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0} \text{ există și este } f(x_0)$$

căci $f(x)$ este continuă, deci $\xi \to x_0 \Rightarrow f(\xi) \to f(x_0)$

$\eta \to x_0 \Rightarrow f(\eta) \to f(x_0)$

---

(25) Am demonstrat deci că $F'(x_0) = f(x_0)$ pentru orice $x_0 \in [a,b]$, de unde:

$\underline{F'(x) = f(x)}$ pe $[a,b]$ ceea ce demonstrează existența antiderivatei.

4 Discuții

1) Afirmația de la pasul 23 este dovedită pornind de la definiția integralei Riemann în trei pași

a) $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$$\sigma_{\Delta n} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \geq 0$$

Așadar sumele Riemann sunt pozitive și nu pot conduce la limită decât la valoare pozitivă

b) $f(x) \geq g(x)$ pe $[a,b]$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (-g(x))dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(suma integralelor)

c) $m \leq f(x) \leq M$

$$\overset{(b)}{\Rightarrow} \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$= m(b-a) \qquad\qquad M(b-a)$$

$$\text{deci } \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [m, M]$$

~~2) Pasul 24 mai putea fi făcut cu teorema lui Darboux pentru funcția continuă~~

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} \in [f(\xi), f(\eta)]$$

2) Demonstrarea posibilității folosirii criteriului (5) de integrabilitate se poate face pornind de la definiția integralei Riemann, în două părți:

a) Se arată echivalența dintre condițiile Riemann și Darboux (f continuă)

b) <u>Demonstrație</u>

— — — — — — — — — — .

b) Se arată echivalența dintre ~~definiția~~ condițiile Darboux și cea folosită în text

<u>Demonstrație</u>

— — — — — — — — — .

3) Afirmația (3) privind posibilitatea extragerii subșirului convergent se poate ~~efectua~~ justifica astfel:

<u>Demonstrație</u>

— — — — — — — — — .