(B) Exemple de abordare a unui capitol.

1. Punerea în ecuație

Studiind legile de desfășurare a unor procese sau fenomene fizice în care intervin mărimile $x_1, x_2, \dots x_n$ se constată apariția unor restricții (legi) de genul:

(1) $F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$

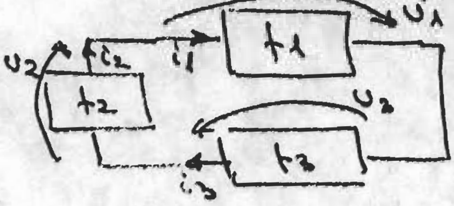
Când mărimile trebuie să ~~...~~ respecte mai multe condiționări fizice care exprimă legătura între ele se ajunge la analiza unui sistem de condiții de genul:

$$(2) \quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ \\ F_m(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

adică m condiții care trebuie satisfăcute simultan.

Dorința de a determina valorile pe care le pot lua mărimile inițial libere, dar care-și pierd libertatea odată cu apariția condițiilor conduce la problema rezolvării sistemului de ecuații (2). Orice grup de valori $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ care satisface condițiile (2) va fi numit soluție a sistemului de ecuații.

Iată exemplul unui circuit electric:



Legile elementelor conectate împreună fiind

$$\begin{cases} U_1 = f_1(I_1) \\ U_2 = f_2(I_2) \\ U_3 = f_3(I_3) \end{cases}$$

iar cele rezultate din conexiune: $\begin{cases} i_1 = i_2 = i_3 \\ U_1 + U_2 + U_3 = 0 \end{cases}$,

cele șase variabile care ne interesează $I_1, I_2, I_3, U_1, U_2, U_3$ trebuie să satisfacă sistemul

$$\begin{cases} U_1 - f_1(I_1) = \cancel{F_1(U_1, I_1) = 0}\ F_1(U_1, I_1, U_2, I_2, U_3, I_3) = 0 \\ U_2 - f_2(I_2) = F_2(U_1, I_1, U_2, i_2, U_3, i_3) = 0 \\ U_3 - f_3(I_3) = F_3(U_1, I_1, U_2, i_2, U_3, I_3) = 0 \\ i_1 - i_2 = F_4(U_1, I_1, U_2, i_2, U_3, i_3) = 0 \\ i_1 - i_3 = F_5(U_1, I_1, U_2, i_2, U_3, i_3) = 0 \\ U_1 + U_2 + U_3 = F_6(U_1, I_1, U_2, i_2, U_3, i_3) = 0 \end{cases}$$

putem aștepta

Situația aceasta este extrem de generală. Sistemele complexe care angrenează multe variabile, nu pot fi în general analizate „aritmetic", adică prin raționamente în linie, calculînd cîte un element la fiecare pas.

Aceasta face problema găsirii unor metode de rezolvare a sistemelor de ecuații, esențială pentru matematica aplicată.

Legile $F_1, F_2 \ldots$ care intervin sînt în general neliniare (funcții de mai multe variabile), aparatul matematic necesar analizei lor depășind cadrul materiei de liceu.

O largă clasă de aplicații conduce la dependențe <u>liniare</u> de genul:

(3) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta_1 = 0$

Un grup de m condiționări de acest tip creează un sistem ca:

$$
(4) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}
$$

(remarcați folosirea indicilor dubli pentru scrierea sistemului în forma cea mai generală, în care avem m „ecuații" (condiții) și n „necunoscute" (mărimi inițial libere)

Înainte de a trece la studiul acestui tip de sisteme, aparent particular, să facem remarca extraordinarei sale aplicabilități. Nu numai că foarte multe situații reale duc la restricții liniare, dar există procedee de „liniarizare" care permit extinderea rezultatelor pentru o clasă de aplicații ~~mult~~ și mai largă.

Aceasta înseamnă că în locul risipei de energie pe care ar reprezenta-o rezolvarea izolată a fiecărei probleme, se va putea dispune de avantajul unui unic raționament, desfășurat pentru rezolvarea unui sistem de tipul (4) și disponibil ori de cîte ori practica trimite la rezolvarea unui caz similar.

2. Rezolvarea sistemului

Nu vom repeta aici procedeele generale cunoscute utilizabile în rezolvarea sistemului, pentru că, în cazul unui număr mare de ecuații ele conduc la calcule obositoare.

În finalul acestor calcule se ajunge la formulele de genul:

$$(5)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (6)\ x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$(7)\ (a_{11}a_{22} \neq a_{21}a_{12})$$

Ce este oare mai ușor, să rezolvi un sistem de tipul 5 prin reducere sau să reții formulele (6) pentru a le folosi cu datele concrete $b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$? A doua variantă pare evident mai puțin recomandabilă. Pentru a ajuta memorarea formulelor (6) să încercăm să exploatăm forma lor particulară, introducând următoarea convenție de scriere:

$$(8)\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \overset{\text{Notație}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix} \quad 8\text{bis.}$$

Avantajul folosirii acestei convenții apare mai clar dacă o aplicăm și numărătorilor:

$$(9)\ b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Formulele care dau soluția capătă forma:

$$(10)\ x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{unde} \quad (11)\ \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta \ *$$

Formula 11 explică simbolul folosit pentru a sintetiza combinația celor patru operanzi. Vom numi <u>determinant</u> această reprezentare. Mai observăm că determinantul de la numitori operează asupra „coeficienților" sistemului, în timp ce la numărători este înlocuită câte o „coloană" cu coloana corespunzătoare a celor două constante („termenii liberi")

Aceste considerații pot părea o complicație inutilă, dar își vor dovedi valoarea atunci când vom crește complexitatea sistemului.

Să analizăm deci cazul

$$(11)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

, unde după calculele de rigoare se obțin formulele

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$(12)\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

în cazul în care numitorul comun al celor trei fracții nu este nul.

Vom nota și de această dată:

$$(13)\quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \ldots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

(determinantul reprezintă de această dată o operație mai complexă: 6 termeni din produse de câte 3 factori, trei cu plus și trei cu minus, angrenând cele 9 numere ale tabloului coeficienților.

Acest efort se justifică numai dacă folosirea determinantului „de ordin 3" permite și reprezentarea numărătorilor.

Într-adevăr, înlocuind, conform ideii de la $n=2$, fiecare coloană cu cea a termenilor liberi, se obține scrierea sintetică

$$(14)\quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \ldots\ldots \quad \text{sau} \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

cu condiția ca Δ_k să reprezinte determinantul obținut din Δ prin înlocuirea coloanei k.

Folosirea determinantului ne scutește de o parte de memorare a formulelor ce face această metodă comparabilă cu cea directă (rezolvarea sistemului) ...

mai ales dacă găsim o manieră de a reține și operațiile cuprinse în determinant, cum ar fi

$$\begin{array}{lllll}
(+) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & (-)\\
(+) & a_{21} & a_{22} & a_{23} & (-)\\
(+) & a_{31} & a_{32} & a_{33} & (-)\\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{array}$$

Regula lui Sarrus

$$(+)\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{array} \qquad (-)\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{array}$$

Regula triunghiului.

Figurile precedente sugerează și o altă manieră de descriere: „de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană se ia câte un factor al ~~[illegible]~~ câte unuia din cele șase produse a căror însumare dă valoarea determinantului."

Crescând „ordinea ecuațiilor" obținem formule tot mai stufoase. Iată de exemplu cazul $n=4$:

$$x_1 = \frac{\qquad\qquad}{a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{41} + \dots}$$

(15.)

$x_2 = \dots$ $\quad x_3 = \dots$ $\quad x_4 = \dots$

Reținerea celor 24 de termeni care compun expresia de la numitoare („determinantul sistemului") pare ~~problema~~ problematică, încât notația:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{41} + \dots$$

nu pare a fi de prea mare folos, în ciuda faptului că și de această dată se verifică formula

$$(17)\quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta},$$

unde $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ rezultă din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare cu cea a termenilor liberi.

3) Determinanți. Permutări. Regula lui Cramer

Pentru a încerca găsirea unei caracterizări a expresiei determinantului pentru $n=4$, dintre metodele precedent folosite la $n=2$ sau 3 se dovedește valabilă observația că fiecare din cei 24 de termeni, rezultă prin alegerea a câte unui element de pe fiecare linie, având grijă să nu luăm doi factori de pe o aceeași coloană.

Termenul are deci forma

$$\underset{1,2,3,4}{a_{1\downarrow}} \cdot \underset{1,2,3,4}{a_{2\downarrow}} \cdot \underset{1,2,3,4}{a_{3\downarrow}} \cdot \underset{1,2,3,4}{a_{4\downarrow}}$$

sau $a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}$ cu $i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}$ diferite între ele

O scriere mai sintetică obținem notând alegerea făcută pentru linia i cu $\sigma(i)$ (coloana aleasă pe linia i)

(18) $$T_\sigma = \pm a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$$

(termenul general)

unde $\sigma=[\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)]$ reprezintă o anumită ordonare a numerelor $1,2,3,4$.

Câte astfel de ordonări sunt posibile? Cărora le va corespunde semn pozitiv și cărora negativ? Pentru a răspunde la aceste întrebări trebuie să analizăm proprietățile permutărilor, căci σ este tocmai o permutare.

Se obișnuiește notația

(19) $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$$ pentru permutarea σ.

Cunoaștem formula pentru numărul permutărilor de ordin n : $n!$

Pentru $n=4$, este obținut un număr de $4! = 24$ de termeni, ceea ce corespunde realității constatate.

In problema noastră în care putem găsi ușor un criteriu pentru împărțirea permutărilor în două clase (cele cu „+" și cele cu „-" în determinant) el ne conduce la noțiunea de paritate a unei permutări căutând un criteriu care să facă distincția, matematicienii au observat că produsul:

(20) $P_\sigma = [\sigma(4)-\sigma(3)][\sigma(4)-\sigma(2)][\sigma(4)-\sigma(1)][\sigma(3)-\sigma(2)][\sigma(3)-\sigma(1)][\sigma(2)-\sigma(1)]$

este pozitiv pentru acele permutări în care apar cu + în cadrul determinantului și negativ ~~pentru~~ pentru celelalte. Puteți verifica direct această afirmație!

Ei au generalizat acest rezultat, considerând o permutare de ordin n:

(21) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ „pară" sau „impară", după cum

$$P_\sigma = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} [\sigma(i)-\sigma(j)]$$ este pozitiv, respectiv negativ.

Revenind la exemplele cu $n=2$ și $n=3$ putem verifica faptul că permutările declarate „pare" după acest criteriu apar într-adevăr „cu +" în dezvoltarea determinantului în timp ce cele impare apar „cu -".

Toate acestea au sugerat regula generală pentru calculul soluției unui sistem de n ecuații cu n necunoscute, de forma:

(22) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ (nu ne vom ocupa aici de demonstrarea formulelor!)

folosind formulele:

(23) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; ... $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, unde înțelegem prin Δ (principiu notat) determinantul (adică rezultatul de calcule), calculat după regula:

(24) $\Delta = \sum_{\sigma \in \text{mulțimea permutărilor}} T_\sigma$ cu (25) $T_\sigma = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{semnul + sau -}}}{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$, după cum permutarea e pară sau impară. Dacă în

(26) ~~Δr~~ $\Delta \overset{Not}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ înlocuim coloanele succesiv cu coloana coeficienților liberi, se obțin pe rând $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$.

Satisfacţia obţinerii acestei formule este însă lipsită de principiu, calculele pe care trebuie să le facem într-un caz concret fiind:

– calculul a $(n+1)$ determinanţi: $\Delta, \Delta_1, \dots \Delta_n$ şi

– ~~Pentru fi~~ în final $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, ...

– Pentru calculul fiecărui determinant trebuie ~~adunaţi~~ calculaţi cei $n!$ termeni obţinuţi prin înmulţirea câte unui element de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană, adică de forma $T_\sigma = a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Pentru a aduna aceşti $n!$ termeni cu semn potrivit, trebuie calculat produsul $P_\sigma = \prod_{i<j} (\sigma(i)-\sigma(j))$ pentru fiecare permutare pentru a-i cunoaşte paritatea!

Aşadar $\underset{\text{determ}}{(n+1)} \cdot \left[\underset{\text{termeni}}{n!} \cdot \left[\underset{\sigma(i)-\sigma(j)}{\frac{n(n-1)}{2}} + 1\right] + \underset{\sum P_\sigma}{1}\right] + n \rightarrow x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \dots$ $\quad P_\sigma$

Din punct de vedere practic e un succes discutabil! Această metodă nu se foloseşte de loc în aplicaţii...

Câştigul net este cel principial, posibilitatea formulei simple $x_i = \Delta_i / \Delta$ care permite, de exemplu să lege discutarea existenţei soluţiei de întrebarea: $\Delta = 0$?.

Sîntem deci îndemnaţi să continuăm studiul.

4. Abordarea matricială

Dorind să găsească o analogie între cazul simplu al ecuaţiei:

$$a \cdot x = b \Rightarrow x = \frac{1}{a} b \quad (a \neq 0),$$

sau mai general modul în care se rezolvă aceeaşi problemă într-un grup $(G, \circ)$:

$$a \circ x = b \Rightarrow a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b \Rightarrow (a^{-1} \circ a) \circ x =$$
$$= a^{-1} \circ b \Rightarrow \underset{\text{el neutru}}{e} \circ x = a^{-1} \circ b \Rightarrow \boxed{x = a^{-1} \circ b}$$

matematicienii au încercat să privească necunoscutele $x_1, x_2 ... x_n$ ca formând un tot unitar, notând:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ și analog } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{27}$$

și transcriind sistemul de ecuații în forma

$$A \bullet X = B \tag{28}$$

ceea ce ar permite continuarea formală

$$A^{-1} \bullet (A \cdot X) = A^{-1} \bullet B$$

$$(A^{-1} \bullet A) \cdot X = A^{-1} \bullet B$$

$$I \quad \bullet \quad X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \bullet B} \tag{29}$$

Formula (29) este foarte atrăgătoare (mai scurtă chiar ca obținută cu determinanți) dar pentru a avea sens trebuie ca

- să precizăm în ce constă operația „•" la care ne-a condus scrierea prescurtată a sistemului
- să analizăm dacă această operație introduce o structură care să permită operațiile de mai sus (asociativitatea, existența lui I, „element ~~[illegible]~~ neutru, existența lui A^{-1}).
- să explicăm modul în care se calculează A^{-1}.

În primul rând cele trei entități care au apărut (X, B, A), în spații blocuri de numere, considerate ca ~~untot~~ tot (fapt sugerat de parantezele rotunde) vor fi numite *matrici*.

Trebuie să avem în vedere poziția fiecărui element al matricii în bloc (precizată prin linie și coloană) ~~pentru~~ ceea ce înseamnă că matricea nu poate fi redusă la o mulțime a componentelor sale

Faptul că în matrice contează atît elementele cît și ordinea lor, rezultă revenind la intenția de scriere a sistemului

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n}^{c_1} = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad = b_2 \\ \overbrace{a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n}^{c_n} = b_n \end{array} \right.$$

(30)

$$C = A \cdot X$$

pe care îl vedem ca o egalitate de matrici:

$C = B$, dacă $c_1 = b_1, \dots c_n = b_n$ (egalitatea componentelor)

Pentru ca matricea $C = A \cdot X$ să reprezinte pe C este nevoie să dăm înmulțirii sensul sugerat de figură:

(31) ~~$c_1 = a_{11}$~~ $c_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n$

S-a ajuns astfel la definirea următoarei operații de „înmulțire" a două matrici cu coeficienți reali: $A(p,q)$ și $B(q,r)$

p linii q coloane q linii r coloane.

(observați nevoia ca nr de col. a lui A să coincidă cu nr de linii lui B)

(32) $A \cdot B = \underset{(p,r)}{C}$ unde elementele lui C sunt calculate după regula $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj}$ (33)

(se combină linia i cu coloana j!)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2q} \\ & & & \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & & \dots \\ & & \\ b_{q1} & \dots & b_{qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & c_{ij} \\ & & \end{pmatrix} \quad (34)$$

Studiul asociativității acestei operații reclamă calcule cu blocuri foarte mari:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \dots a_{1q}b_{q1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \dots & \dots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \dots a_{2q}b_{q1} & a_{21}b_{12} + \dots & \\ & & \\ a_{p1}b_{11} \quad + a_{pq}b_{q1} & a_{p1}b_{12} + \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ & & \\ c_{r1} & \dots & c_{rs} \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots a_{1q}b_{q1})c_{11} + \dots (a_{p1}b_{12} + a_{22}b_{22} \dots)c_{21} + \dots + (\quad)c_{r1} & - - - \\ \vdots & \\ & - - - \end{pmatrix}$$

De exemplu mai sus este necesară suita $(A \cdot B) \cdot C = D$ unde $A(p,q)$, $B(q,r)$, $C(r,s)$ sînt trei matrici.

Efectuînd apoi $\overset{= E}{A(BC)}$ vom putea compara cele două ~~pe~~ matrici de dimensiune (p,s) rezultate, element cu element, ajungînd în final la valabilitatea asociativității.

Același rezultat poate fi obținut mult mai elegant folosind descrierea generală a ~~termenilor~~ elementelor matricii produs (33)

$$\underbrace{(A \cdot B)}_{F} \cdot C = D \qquad A\underbrace{(B \cdot C)}_{G} = E \qquad (35)$$

Un element oarecare a matricii D are forma

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} f_{ik} c_{kj} \quad \text{unde} \quad f_{ik} = \sum_{m=1}^{q} a_{im} b_{mk} \quad (36)$$

(element $A \cdot B$)

$$= f_{i1}c_{1j} + \dots + f_{ir}c_{rj} \qquad = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{iq}b_{qk}$$

Observați că simbolul folosit ca indice de sumare nu are importanță $a_1 + a_2 \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{mama=1}^{n} a_{mama}$!

Deci

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{m=1}^{q} a_{im} b_{mk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{m=1}^{q} a_{im} b_{mk} c_{kj} \right) (37)$$

(nu depinde de m deci înm. toți termenii sumei

Procedînd analog pentru E :

$$e_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{q} a_{i\alpha} g_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{q} a_{i\alpha} \underbrace{\left(\sum_{\beta=1}^{r} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} \right)} = \sum_{\alpha=1}^{q} \left(\sum_{\beta=1}^{r} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} \right)$$

sau schimbînd ~~ordinea~~ notația indicilor de sumare (putem folosi orice în afară de i și j) $e_{ij} = \sum_{m=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{im} b_{mk} c_{kj} \right)$ 38

Deosebirea între d_{ij} și e_{ij} ~~...~~, în lumina relațiilor (37)(38) este inversarea ordinii sumării celor $(r \cdot q)$ elemente

Analizând tabloul

t_{11}	t_{12}	...	t_{1r}	$\rightarrow \sum_{m=1}^{r} t_{1m}$
t_{21}	t_{22}		t_{2r}	$\rightarrow \sum t_{2m}$
t_{q1}	t_{q2}		t_{qr}	$\rightarrow \sum_{m=1}^{r} t_{qm}$
$\sum t_{k1}$	$\sum t_{k2}$		$\sum t_{kr}$	

$$\sum t_{k1} \quad \sum t_{k2} \quad \sum t_{kr} \rightarrow \boxed{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} t_{km}} = \boxed{\sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{r} t_{km}}$$

ajungem la concluzia că, adunând întîi toate elementele de pe o linie a sa și făcând apoi suma sumelor parțiale sau adunând mai întîi pe coloane și în final rezultatele pe coloane se obține același lucru: suma tuturor elementelor tabloului!

Deci $d_{ij}=e_{ij}$ pentru orice i și j, ceea ce înseamnă că matricile D și E au aceleași elemente și sînt egale.

Căutând elementul neutru $\underline{i}$ s-a ajuns la concluzia că matricea

(39) $$i_p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad i_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq j \\ 1 & \text{dacă } i = j \end{cases}$$
(pe diagonală)

joacă acest rol la __stânga lui A__:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{I_1 \cdot \quad A}_{E} = A$$

$$\cancel{e_{ij} = \sum} \ (40) \quad e_{jk} = \sum_{m=1}^{p} \underbrace{i_{jm}}_{\text{nul pentru } m \neq j} a_{mk} = 0 \dots + \boxed{a_{jk}} + \dots$$

Egalitatea ~~i~~ $A \cdot I_2 = A$ nu va fi satisfăcută de $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ & & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ q linii și coloane

Observați că I_1 nici nu poate fi avut în vedere, repetând înmulțirea la dreapta pe A!

Cu această ocazie vom evidenția faptul că produsul matricilor introdus nu e comutativ.

Chiar dacă, pentru ca expresiile $A\cdot B$ și $B\cdot A$ să aibă sens simultan, vom lua $p=q=r$, adică vom lucra cu matrici pătrate se pot da imediat exemple care contrazic comutativitatea.

Totuși în acest caz $i_p = i_q$ va satisface condiția unui element neutru.

Am ajuns acum la ultima întrebare: există A^{-1} astfel încât să avem:

$$A\cdot X = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}\cdot B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$i \qquad X = A^{-1}B$$

(Desigur matricea A fiind pătrată: n linii, n coloane, existența lui i este asigurată)

Din relațiile de mai sus, observăm că A^{-1} trebuie căutată de forma (n,n) adică:

(41) $A^{-1} = Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{pmatrix}$ și $A^{-1}\cdot A = i_n$ conduce $A\cdot A^{-1} = i_n$

la relațiile:

$$(42)\ \begin{cases} a_{11}y_{11}+\dots+a_{1n}y_{n1}=1 & a_{11}y_{12}+\dots+a_{1n}y_{n2}=0 \quad \dots \\ a_{21}y_{11}+\dots+a_{2n}y_{n1}=0 & a_{21}y_{12}+\dots+a_{2n}y_{n2}=1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}y_{11}+\dots+a_{nn}y_{n1}=0 & a_{n1}y_{12}+\dots \qquad =0 \quad \dots \end{cases}$$

$\qquad\qquad(1) \qquad\qquad\qquad\qquad (2) \longrightarrow$

În principiu, aceste relații în care y_{ij} (componentele inversei) sunt necunoscute este solubil. El are însă n^2 ecuații cu n^2 necunoscute, deci rezolvarea lui duce la o problemă mai complexă decât cea inițială!

Observând totuși atunci coloanele lui AY, ele formează câte un sistem independent din n ecuații cu matricea A ~~ca~~ drept coeficienţi şi o anumită simplitate a termenilor liberi.

Matriceal s-au obţinut sistemele:

$$(43)\quad \underset{\text{(coloana 1 din Y)}}{A\cdot Y_1} = i_1 \;;\; \underset{\text{(coloana 2 din Y)}}{A\cdot Y_2} = \underset{\text{(coloana 2 din i)}}{i_2} \;----\;;\; A\cdot Y_n = i_n$$

pentru ~~de~~ determinarea lui $A^{-1} = (Y_1\, Y_2 \dots Y_n) = Y$

„Rezolvarea": $Y_1 = A^{-1}\cdot i_1$ etc conduce la un evident cerc vicios.

5) Folosirea determinanţilor pentru aflarea lui A^{-1}.

Dispunem încă de o metodă de rezolvare a sistemelor de ecuaţii cu ajutorul determinanţilor (încă nedemonstrată).

O putem deci aplica în căutarea-l pe A^{-1}, rezolvînd în acest fel sistemele 43:

$$\begin{cases} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} + \dots + a_{1n}y_{n1} = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}y_{11} + a_{n2}y_{21} + \dots + a_{nn}y_{n1} = 0 \end{cases} \quad (44)\quad \text{cu } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

are soluţia:

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \quad y_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \quad ---- \quad y_{n1} = \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} \qquad (45)$$

unde conform principiului Δ_{i1} se obţin înlocuind coloana i cu term. liber

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{vmatrix} \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{1} & a_{13} \dots \\ a_{21} & 0 & \\ & 0 & \\ \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \quad (46) \quad \Delta_{j1} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,j-1} & \cancel{1} & a_{1\,j+1} \dots \\ - \quad - & - & - \\ a_{j1} \dots a_{j\,j-1} & 0 & a_{j\,j+1} \dots \\ & 0 & \\ & \vdots & \end{vmatrix}$$

Procedînd la fel pentru celelalte (n-1) sisteme prin care se determină coloanele inversei:

$$i \rightarrow \begin{cases} a_{11}y_{1i} + a_{12}y_{2i} \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \vdots \end{cases} \Rightarrow y_{1i} = \frac{\Delta_{1i}}{\Delta}; ---- \; y_{ni} = \frac{\Delta_{ni}}{\Delta} \qquad (47)$$

unde ~~Δ_{ji}~~ Δ_{ji} (48)

$$\Delta_{ji} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{i1} & & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \cdots \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & 0 & & \end{vmatrix}$$

, adică se obține din Δ, înlocuind coloana j cu un șir de 0 zero în afară de linia i unde este 1.

Am ajuns deci la concluzia că

$$A^{-1} = Y = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \cdots & \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} \\ & & & \\ \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} & \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} & & \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Să observăm că această formulă e valabilă pentru $\Delta \neq 0$.

rămânând să probăm că $A^{-1} \cdot A = I$ pentru a fi siguri că am găsit matricea inversă.

Rezultatul e deocamdată la fel de neperfect ca teorema lui Cramer, pe care se bazează!

În acest moment părem ajunși într-un punct mort în încercarea noastră de a găsi, și demonstra o formulă de rezolvare a sistemului.

6) ~~Di~~ Demonstrarea formulei de inversare.

Și totuși nu este așa, pentru că, deși nedemonstrat am ajuns la o formulă pentru A^{-1} care s-ar putea demonstra prin verificare directă. (ceea ce nu era cazul cu regula lui Cramer)

Să încercăm deci să arătăm că:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ folosind A^{-1} din relația 49.

Obținem sistemul de relații (42) ~~să~~ care trebuie să fie verificate cu $y_{ji} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta}$.

În consecință ar trebui să putem demonstra

(50) că $\begin{cases} a_{11}\dfrac{\Delta_{11}}{\Delta} + a_{12}\dfrac{\Delta_{21}}{\Delta} + \dots + a_{1n}\dfrac{\Delta_{n1}}{\Delta} = 1 \\ a_{j1}\dfrac{\Delta_{11}}{\Delta} + a_{j2}\dfrac{\Delta_{21}}{\Delta} + \dots = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_{11}\dfrac{\Delta_{12}}{\Delta} + a_{12}\dfrac{\Delta_{22}}{\Delta} + \dots = 1 \\ \dots \end{cases}$

O scriere sintetică a acestor n^2 relații este

(51) $$\frac{1}{\Delta}\left(a_{i1}\Delta_{1j} + a_{i2}\Delta_{2j} + \dots + a_{in}\Delta_{nj}\right) = \delta_{ij} \begin{cases} 0 \text{ pt } i \neq j \\ 1 \text{ pt } i = j \end{cases}$$

coloana j înlocuită cu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to j$ $\qquad$ coloana a 2^a înlocuită cu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \to j$ etc.

Mai clar se ajunge la identitatea

(52) $$a_{i1}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots \\ \vdots & & \\ 1 & a_{j2} & \\ 0 & \vdots & \\ \vdots & a_{n2} & \end{vmatrix} + a_{i2}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & 1 & a_{j3} \\ \vdots & - & - \end{vmatrix} + \dots + a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ & & \\ a_{j1} & \dots \, a_{j,n-1} & 1 \\ \dots & - & - \end{vmatrix} = \delta_{ij}\cdot\Delta$$

Să luăm exemplul $i=j=1$. Încercăm să demonstrăm

(53) că $$a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ \vdots & 0 & \\ & \vdots & \end{vmatrix} + \dots + a_{1n}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 1 \\ & & 0 \\ & & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Notăm $A_{11} = \Delta_{11}$ $\qquad A_{12} = \Delta_{21}$

(complementul algebric al lui a_{11} în determinant)

(A_{ij} se obține înlocuind elementul a_{ij} cu 1 și completarea restului coloanei sale cu 0)

(54) Dar $\Delta_{11} \overset{def}{=} \sum_{\sigma \in Per} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$ (se ia

câte un element de pe fiecare coloană, având grijă să nu se repete o linie, deci se aleg pentru coloanele $1, 2, \dots n$ liniile $\sigma(1), \sigma(2), \dots \sigma(n)$, respectând paritatea permutării prin alocarea semnului + sau − lui $\varepsilon(\sigma)$.

Orice alt ~~factor~~ element se alege de pe coloana 1, în afară de $a_{11} = 1$ se află nul, deci și ~~factorul~~ termenul T_σ, pentru $\sigma(1) \neq 1$.

Așadar $$\Delta_{11} = \sum_{\substack{\sigma \in Per \text{ cu} \\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\cdot 1 \cdot a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \quad (55)$$

analog se obține $\Delta_{12} = \sum\limits_{\sigma\in Per\ cu\ \sigma(2)=2} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\cdot 1\cdot a_{\sigma(3),3}\cdots$ (56)

etc.

Am obținut deci pentru suma din (53) (57)

$$S_{11} = a_{11}\sum_{\substack{\sigma\in Per\ cu\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\cdot 1\cdot a_{\sigma(2),2}\cdots + a_{12}\sum_{\substack{\sigma\in Per\ cu\\ \sigma(2)=2}} \varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot 1 \cdot a_{\sigma(3),3}\cdots$$

$$= \sum_{\substack{\sigma\in Per\ cu\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{11}\, a_{\sigma(2),2}\cdots + \sum_{\substack{\sigma\in Per\ cu\\ \sigma(2)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{12}\cdots + \dots + \sum_{\substack{\sigma\in Per\ cu\\ \sigma(n)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdots a_{1n}$$

$$\|$$

$$\sum_{\substack{\sigma\in Per\ cu\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdots + \sum_{\substack{\sigma\in Per\\ cu\ \sigma(2)=1}} \cdots + \sum_{\substack{\sigma\in Per\\ cu\ \sigma(n)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

Dar descompunerea de mai sus reprezintă o desfacere în n sisteme distincte a celor $(n\cancel{-1})!$ permutări, după cum ~~după coloana~~ linia 1 a fost aleasă pe coloana 1, 2 ... sau n.

Evident că în acest fel sînt luate toate cazurile, în mod unic, deci $S_{11} = \sum\limits_{\sigma\in Per} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} = \Delta$.

Să studiem acum elementul S_{12} : $\left|\begin{matrix} i=2\\ j=1\end{matrix}\right.$. Avem:

$$a_{21}\sum_{\sigma\in Per} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)}\cdots + \_\_\_\_\_\_ =$$

(unde coloana întîia a minorului cu $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\end{pmatrix}$ deci $a_{\sigma(1)1}\begin{cases}0 & \sigma(1)\neq 1\\ 1 & \sigma(1)=1\end{cases}$

(58)

$$= a_{21}\sum_{\substack{\sigma\in Per\\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3}\cdots + a_{22}\sum_{\substack{\sigma\in Per\\ \sigma(2)=1}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdot 1\cdot a_{\sigma(3)3}\cdots = ?$$

Această desfacere se amintește de (57), numai că pentru a o vedea ca determinant apare dificultatea că în interiorul sumelor nu sînt permutări autentice (de ex la prima: coloanele sunt 2, 3 ... n și liniile 1, 3, ... n ! etc).

Conform observației precedente o astfel de desfacere ar putea fi văzută ca determinant, dacă ar avea coeficienții $a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n}$ înlocuiți cu $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}$.

O astfel de înlocuire devine justificată, dacă se presu-

Sîntem astfel conduşi firesc la întrebarea : dacă două linii ale unui determinant coincid, putem deduce că acesta este nul ?

Dacă răspunsul va fi afirmativ atunci vom putea justifica până la capăt formulele (53), deci demonstra formula de inversare a unei matrici şi prin aceasta de rezolvare a sistemului.

Sîntem în mod firesc conduşi la studiul anumitor proprietăţi ale determinanţilor, adică unor reguli de calcul care să poată fi adăugate definiţiei, făcînd mai flexibil calculul lor.

Ne concentrăm atenţia asupra situaţiei liniilor egale.

7) Demonstraţii finale

(T1) Dacă sch. ~~două~~ două linii între ele, determinantul îşi neagă valoarea.

Demonstraţie

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \to \text{linia } i \\ \\ \to \text{linia } j \\ \\ \end{array}$$

elemente notate cu b_{mn}, $\left\{ \begin{array}{l} a_{mn} \\ m \neq i \\ m \neq j \\ b_{jn} = a_{in} \\ b_{in} = a_{jn} \end{array} \right.$

Avem conform definiţiei

$$\Delta' = \sum_{\sigma \in Per}{}' \varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in Per}{}' \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\,\sigma(i-1)}\, \underset{\downarrow}{a_{j\sigma(i)}}\, a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{j-1\,\sigma(j-1)}\, \underset{\downarrow}{a_{i\sigma(j)}}\, a_{j+1\,\sigma(j+1)}$$

(în locul elem de pe linia i) $\qquad$ (- - -)

Aducînd ~~doi~~ termenii la locul lor :

$$\Delta' = \sum_{\sigma \in Per}{}' \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\,\sigma(i-1)}\, a_{i\sigma(j)}\, a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots$$

$$= \sum_{\sigma \in Per}{}' \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma'(1)} \cdots\cdots a_{i\sigma'(i)} \cdots a_{j\sigma'(j)} \cdots$$

care este modificarea față de permutarea inițială:

$$\overset{\sigma}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots \\ & & & \sigma(i) & & \sigma(j) & \end{pmatrix}} \xrightarrow{T} \overset{\sigma'}{\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots \end{pmatrix}}$$

Este evident că prin transformarea aceasta toate permutările se regăsesc, într-o altă poziție din șirul termenilor din Δ.

Singura problemă este dacă, prin această transformare (transpoziție) tipul de permutare se modifică sau nu.

Pentru a putea răspunde vom proceda succesiv, văzând transpoziția T ca o suită de transpoziții elementare (schimbarea între două nivele consecutive)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots \\ & & & \sigma(i) & \sigma(i+1) & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{T_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \\ & & & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \boxed{T_2}$$

$$\dots \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & i+2 & \dots \\ & & & \sigma(i+1) & \sigma(i+2) & \sigma(i) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \boxed{T_{j-i}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j-1 & j \\ & & & \sigma(i+1) & & \sigma(j-1) & \sigma(j) \end{pmatrix} \xleftarrow{T_j} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j-1 & j \\ & & & \sigma(i+1) & & \sigma(j) & \sigma(i) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots \\ & & & \sigma(j) & \sigma(i+1) & \end{pmatrix} \longrightarrow T_{2(j-i)-1}$$

Arătând că la fiecare transpoziție elementară paritatea se schimbă și observând că avem un număr impar de transp. elementare, deducem rezultatul dorit.

În ceea ce privește transpoziția elementară:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots \\ & & \sigma(i) & \sigma(i+1) & \end{pmatrix} \to \sigma' \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots \\ & & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots \end{pmatrix}$$

$P_\sigma = [\sigma(n)-\sigma(1)]\dots[\sigma(n)-\sigma(i)][\sigma(n)-\sigma(i+1)]\dots\dots[\sigma(i+1)-\sigma(1)]\dots[\sigma(i+1)-\sigma(i)]\dots$

$P_{\sigma'} = [\sigma(n)-\sigma(1)]\dots[\sigma(n)-\sigma(i+1)][\sigma(n)-\sigma(i)]\dots[\sigma(i)-\sigma(i+1)]\dots$

Toți factorii fiind identici cu afară de unul care e negat, $P_{\sigma'} = -P_\sigma$. Deci transpoz. elementară schimbă

Din acest motiv putem scrie

$$\Delta' = \sum_{\sigma' \in Per}' -\varepsilon(\sigma') a_{1\sigma'(1)} \dots a_{n\sigma'(n)} = -\Delta.$$

Aşadar prin schimbarea a două linii determinantul îşi neagă valoarea!

(T2) Un determinant cu două linii egale e nul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & \\ a_{i1} & \dots & \\ & & \end{vmatrix} \begin{matrix} \to i \\ \to j \\ \\ \end{matrix}$$

Soluţie

Înlocuim linia i cu linia j şi obţinem un determinant $\Delta' = -\Delta$. Pe de altă parte, fiind vorba evident de tot de determinantul iniţial $\Delta' = \Delta$. Deci $\Delta = -\Delta \Rightarrow \Delta = 0$.

(T3) Dezvoltarea unui det. după o linie:

$$\Delta = a_{i1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & \end{vmatrix}}_{A_{i1}} + a_{i2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \\ a_{12} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ \cdot & 1 & \\ a_{1n} & 0 & \end{vmatrix}}_{A_{i2}} \to i + \dots + a_{in} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & & 1 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{vmatrix}}_{A_{in}} \to i$$

$i \leftarrow$

("complemenţi algebrici").

Demonstraţie (vezi şi 6)

$$a_{i1} A_{i1} + \dots = a_{i1} \sum_{\substack{\sigma \in Per \\ \sigma(1) = i}}' \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(2)2} \dots + a_{i2} \sum_{\substack{\sigma \in Per \\ \sigma(2) = i}}' \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(3)3} \dots =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in Per \\ \sigma(1) = i}}' \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} + \dots + \sum_{\substack{\sigma \in Per \\ \sigma(2) = i}}' \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots = \sum' \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots = \Delta.$$

Observaţie

$$A_{ij} = \sum_{\substack{\sigma \in Per \\ \sigma(j) = i}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(j-1)j-1} a_{\sigma(j+1)j+1} \dots$$ reprezintă

un determinant cu coloanele $1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ şi liniile $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, adică

având eliminate linia i şi coloana j:

$$i \begin{vmatrix} & & & j & & & \\ & & & \times & & & \\ & & & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & & & \\ & & & \times & & & \end{vmatrix} \to d_{ij}$$

(minorul "având tăiată" linia i și coloana j)

Evident că $d_{ij} = \sum'_{\sigma' \in P_{n-1}} \varepsilon(\sigma')\, a_{\sigma'(1)1} \dots$

așadar, mai apare problema semnului dat lui $\varepsilon(\sigma')$ față de $\varepsilon(\sigma)$. ~~Evident că~~ Se poate arăta ușor că relația ~~$P_\sigma = P_{\sigma'} \cdot \sigma(j)$~~ va da $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)(-1)^{i+j}$ adică

$$A_{ij} = d_{ij}(-1)^{i+j}$$

(T4) Combinația dintre linii și complemenții algebrici

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \Delta & \text{pentru } i=j \\ 0 & \text{pentru } i\neq j \end{cases}$$

<u>Soluție</u>

Pentru $i=j$, regăsim T3

Pentru $i\neq j$ (elementele liniei i combinate cu complemenții algebrici ai liniei j) se obține de fapt dezvoltarea determinantului

$$\begin{array}{c} i \to \\ \\ j \to \end{array} \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & \dots \\ & & \\ a_{i1} & \dots & \dots \end{vmatrix} = \Delta$$

după linia j, fapt ce poate fi probat cu ușurință. Dar evident $\Delta = 0$ având două linii egale.

(T5) Formula de inversare a unei matrici.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ & & & \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & & & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

<u>Demonstrație</u>

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n}}{\Delta} & \frac{a_{11}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{2n}}{\Delta} & \dots \\ \frac{a_{21}A_{11} + \dots + a_{2n}A_{1n}}{\Delta} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ori conform lui T6, elementele de pe diagonală sînt egale cu unitatea, iar celelalte nule.

(T6) Rezolvarea unui sistem. Regula lui Cramer

$$AX = B \quad (\Delta \neq 0) \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \cdots & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\Delta}\overbrace{(b_1A_{11} + b_2A_{21} \ldots + b_nA_{n1})}^{\Delta_1} \\ x_2 = \frac{1}{\Delta}\underbrace{(b_1A_{21} + b_2A_{22} \ldots \ldots)}_{\Delta_2} \\ \vdots \end{cases}$$

Dar este evident, dezvoltînd determinantul

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2 & a_{21} \ldots a_{2n} \\ & \\ b_n & \end{vmatrix}$$

(Obținută analog cu regula dezvoltării după o linie).

, după coloana 1, că...

$d_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} = \Delta_1$ ... la fel și celelalte.

Comentarii

Șirul de teoreme (1-6) care a dus la rezolvarea sistemului propus pare simplă. Pentru a ajunge însă la ea în mod firesc, prin căutare au fost necesare ~~un~~ tatonări care au dus în final la depistarea drumului către succes.

Deși am obținut atît formula pentru inversa unei matrici, cît și pentru rezolvarea sistemului, calculele în sine sînt prea laborioase pentru a se putea folosi în practică.

În plus problema inexistenței lui A^{-1}, (anulării lui Δ) va conduce la problema punerii la punct a unei metodologii pentru discutarea sistemelor de ecuații.

Pentru aceasta vom relua ordonat, studiind matricilor și determinanților

etc