Roşca Ioan

- an III Electronică şi telecomunicaţii

Implicaţii ale conceptelor fuzzy în teoria fiabilităţii

(1) Generalităţi.

(Exemplificări pe situaţii întîlnite în electronică).

1.1 Introducere

In matematica clasică, pentru definirea unei mulţimi este esenţial să putem preciza dacă un obiect sau entitate oarecare îi aparţine sau nu. Dacă există incertitudine asupra apartenenţei la mulţime, calitatea de mulţime al colectivului studiat cade.

De aceea, în timp ce expresii de tipul „amplificatoare cu bandă între 50Hz – 20kHz" vor conduce, într-un caz concret la o submulţime A_1 din mulţimea A a amplificatoarelor, expresia „amplificatoare de bandă largă" (fără alte precizări sau convenţii) nu conduce la separarea unei submulţimi A_2 din mulţimea amplificatoarelor. Cu toate acestea operăm foarte des cu astfel de exprimări neprecise şi e natural să încercăm să încadrăm matematic entităţile pe care ele le reprezintă.

Să remarcăm de la început că ceea ce caracterizează aceste situaţii este lipsa de precizie asupra apartenenţei unui element oarecare la „mulţimile" (deocamdată impropriu spus) astfel descrise.

In anul 1965 matematicianul şi sistematicianul Zadeh, pornind de la încercarea de a opera cu sisteme insuficient de bine precizate, defineşte mulţimile vagi (fuzzy) şi apoi diverse concepte vagi.

El propune gradarea apartenenței la o mulțime (astfel că un element poate aparține mai mult sau puțin unei „mulțimi"), gradare care, deși lăsată subiectiv (în cazurile concrete) poate conduce totuși la manipularea unor concepte (chiar aproximativă) în situații în care acest lucru nu ar fi fost posibil în maniera clasică.

Astfel, matematica poate pătrunde în lingvistică, în literatură, medicină, -gie, în situații în care complexitatea sistemelor împiedică o analiză cu mijloacele matematicii clasice, sau mai mult, în situații în care însăși înțelegerea unui anumit concept este vag. (sănătatea unui om, frumusețea unei poezii etc)

In ceea ce privește preocupările noastre, (electronice) observația fundamentală pe care o putem face este <u>ridicarea continuă a nivelului de complexitate a structurilor, sistemelor studiate</u> astfel încît se întrevede posibilitatea de a ajunge în situații vagi, de felul celor arătate mai sus, pentru care nu vom avea construită o aparatură generală de manipulare. (de altfel se cunosc atît de mult exemple care ilustrează că s-a ajuns deja în astfel de situații.)

Omul are superioritatea actuală de a putea manipula concepte vagi (ceea ce mașinile create de el nu pot). Noi vrăm zilnic tot felul de expresii, idei, stări, pe care nu ni le putem defini cu precizie (uneori chiar de loc) ceea ce nu ne împiedică să le folosim pentru a ne înțelege.

Vom putea oare crea mașini cu aceeași capacitate? Vom putea manevra instabilul cu sisteme special concepute? Desigur pot exista mari rezerve, dar promisiunile oferite de asemenea posibilități sînt cu totul ieșite din comun.

Exemplul 1:

În exemplul pe care l-am dat cu „amplificatoarele de bandă largă" am putea proceda în mai multe feluri (aici e esențială subiectivitatea cu care vom alege caracterizarea apartenenței):

a) – Fie banda B și din mulțimea $\mathcal{A}$ a amplificatoarelor de care dispunem, hotărâm că „bandă largă" înseamnă:

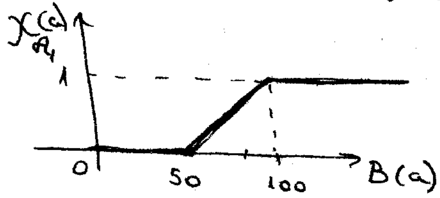
$B > 100\,KHz$ $\Rightarrow$ Dacă $a \in \mathcal{A}$:
- $B(a) \leq 100\,KHz \rightarrow a \notin \mathcal{A}_1$
- $B(a) > 100\,KHz \rightarrow a \in \mathcal{A}_1$ (unde $\mathcal{A}_1$ sunt amplif. de bandă largă)

Am ~~dat~~ creat astfel o mulțime A_1 în sens obișnuit.

b)

Dacă $a \in \mathcal{A}$
$$\begin{cases} B(a) \leq 50\,KHz \rightarrow \chi_{A_1}(a) = 0 \\ B(a) \in (50\,KHz, 100\,KHz) \quad \chi_{A_1}(a) = \dfrac{x}{50} - 1 \\ B(a) \geq 100\,KHz \Rightarrow \chi_{A_1}(a) = 1. \end{cases}$$

Sau grafic



unde: $\chi_{A_1}(a) : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ va fi „funcția de apartenență" la mulțimea $\mathcal{A}_1$

(Deci, de ex: pentru $B = 25\,KHz$, (sau „$\in_0 \mathcal{A}_1$") amplif. respectiv nu aparține mulțimii $\mathcal{A}_1$) „$B = 75\,KHz$, el „$\in_{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_1$", iar pt $B = 150\,KHz$ el „$\in_1 \mathcal{A}_1$"

Este evident că în cazul b) s-a făcut o nuanțare a apartenenței la mulțimea „$\mathcal{A}_1$ (amplificatoare de bandă largă)", care poate corespunde mai bine unei situații concrete (este mai „bogată"). Este evidentă oarecum subiectivitatea cu care putem alege funcția $\chi_{\mathcal{A}_1}(a)$ (subiectivitate ce provine din vagul expresiei „bandă largă").

1.2 Definiții.

Mulțime fuzzy în $\mathcal{A}$ – o aplicație $\chi : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$

(Observație: intervalul real $[0,1]$ este considerat aici ca latice distributivă cu prim și ultim element, organizat de exemplu de operațiile
$$\begin{cases} a \vee b = \max(a,b) \\ a \wedge b = \min(a,b) \\ \bar{a} = 1 - a \end{cases}$$
și în acest sens, dacă în locul lui luăm o algebră Boole oarecare B, vom pu-

tea vorbi de B-mulțime fuzzy : $\mathcal{X}_B : A \to B$)

S-a refăcut, pornind de aici drumul matematicii clasice, definindu-se și structurîndu-se (cu apariția în unele cazuri a unor probleme calitativ noi) conceptele fuzzy de:

- relații fuzzy
- ~~funcții fuzzy~~
- vecinătăți, topologie, continuitate fuzzy.
- functori și categorii fuzzy.
- eveniment fuzzy, entropie fuzzy etc etc. etc

(cu numeroase aplicații ulterioare în diverse domenii de cercetare)

Vă spunem câteva definiții, necesare în cea ce urmează:

a) operațiile cu mulțimi fuzzy; egalitatea lor; incluziune:

$$M = N \iff \mathcal{X}_M(x) = \mathcal{X}_N(x) \quad \forall x$$

$$M \subset N \iff \mathcal{X}_M(x) < \mathcal{X}_N(x)$$

$$\begin{cases} M \cup N, \text{ cu } \mathcal{X}_{M\cup N}(x) = \mathcal{X}_M(x) \vee \mathcal{X}_N(x) \overset{[0,1]}{=} \max(\mathcal{X}_M(x), \mathcal{X}_N(x)) \\ M \cap N, \text{ cu } \mathcal{X}_{M\cap N}(x) = \mathcal{X}_M(x) \wedge \mathcal{X}_N(x) \overset{[0,1]}{=} \min(\mathcal{X}_M(x), \mathcal{X}_N(x)) \\ CM \text{ cu } \mathcal{X}_{CM}(x) = \overline{\mathcal{X}_M(x)} \overset{[0,1]}{=} 1 - \mathcal{X}_M(x) \end{cases}$$

(cu posibilitatea demonstrării proprietăților lor obișnuite

produsul algebric : $\mathcal{X}_{M\times N} = \mathcal{X}_M \cdot \mathcal{X}_N$

suma algebrică : $\mathcal{X}_{M+N} = \mathcal{X}_M + \mathcal{X}_N - \mathcal{X}_M \cdot \mathcal{X}_N$

b) Relație fuzzy : aplicație $X \times Y \to [0,1]$ (submulțime fuzzy R a lui $X \times Y$)

$\boxed{\text{Exemplul}}$ (des întâlnit în discuțiile asupra circuitelor electronice): Se ajunge des la condiția „R_1 considerabil mai mare ca R_2" (pentru buna funcționare a unui circuit), relație evident vagă, asupra căreia în cazurile complexe nu se pot face alte precizări.

O putem organiza ca relație vagă:

$$\mathcal{X}_R(R_1, R_2) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \frac{R_1}{R_2} < 10 \\ \dfrac{\frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2} + 50} & \text{pentru } \frac{R_1}{R_2} \geq 10 \end{cases}$$

- $\frac{R_1}{R_2} = 10 \to \mathcal{X}_R(R_1, R_2) = \frac{1}{6}$
- $\frac{R_1}{R_2} = 50 \to \mathcal{X}_R(R_1, R_2) = \frac{1}{2}$
- $\frac{R_1}{R_2} = 100 \to \mathcal{X}_R(R_1, R_2) = \frac{2}{3}$
- $\frac{R_1}{R_2} = 1950 \to \mathcal{X}_R(R_1, R_2) = 0$

(2) Vag și aleator (rapoarte și interdependențe) (Aplicații în măsurări și control statistic)

2.1 Cred ~~eu~~ că este evidentă pentru oricine deosebirea calitativă dintre situațiile în care se manifestă caracterul vag și cel aleator.

Aleatorul corespunde imposibilității de a decide asupra apartenenței unui element ~~dintr-o~~ la una dintr-o mulțime de mulțimi foarte bine precizate, în timp ce vagul conține însăși neclaritatea asupra ~~a~~ noțiunii de apartenență la mulțime, neclaritate rezolvată subiectiv prin nuanțarea apartenenței (există grade de apartenență)

Putem introduce chiar într-un câmp de probabilitate pe R^n : $(R^n, \mathcal{B}, P)$ (– R^n sp euclidian n-dimensional; – $\mathcal{B}$ – corpul mulțimilor boreliene; – P – o probabilitate în R^n)

a) noțiunea de eveniment fuzzy în R^n – o submulțime fuzzy $E \subset R^n$, a cărei funcție de apartenență χ_E este măsurabilă Borel.
(dacă $\chi_E : R^n \to [0,1]$ și $\mathcal{B}[0,1]$ e fam mulț boreliene din intervalul $[0,1]$, E e eveniment fuzzy $\Leftrightarrow \chi_E^{-1}(\mathcal{B}[0,1]) \subseteq \mathcal{B}$.)

b) – și probabilitate a unui eveniment fuzzy

$$(1) \quad P(E) = \int_{R^n} \chi_E(x)\, d\, P(x) \quad \text{(integrala Lebesgue)}$$

unde se pot demonstra proprietăți analoage celor de la evenimentele nonfuzzy. Exemplu:

– $P(E \cup F) + P(E \cap F) = P(E) + P(F)$

Demonstrație

$$P(E\cup F) + P(E\cap F) = \int_{R^n} \chi_{E\cup F}\, dP + \int_{R^n} \chi_{E\cap F}\, dP = \int_{R^n} [\sup(\chi_E, \chi_F) + \inf(\chi_E, \chi_F)]\, dP$$

$$= \int_{R^n} (\chi_E + \chi_F)\, dP = P(E) + P(F)$$

– evenimente independente $P(E \cdot F) = P(E) \cdot P(F)$ (se ia E·F direct și nu intersecția, pentru că va corespunde sensului clasic mai bine). $(\chi_{E \cdot F} = \chi_E \cdot \chi_F)$. etc

c) Pentru cazurile ampersilor derivate și limite spre exemplu putem introduce:

cu $\begin{cases} X = \{a_1, \dots, a_n\} \\ P = \{p_1, \dots, p_n\} \end{cases}$ şi fie A_1 o submulţime fuzzy a lui X.

— entropia lui A_1 : (3) $\boxed{H_p(A_1) = -\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_1}(a_i)\, p_i \ln p_i}$

probabilitatea lui A_1 : (2) $P(A_1) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_1}(a_i)\, p_i$ (particulariz. relaţiei 1)

(definirea entropiei probabilistice a unui eveniment fuzzy)

— Luăm funcţia $S(x) = -[x \ln x + (1-x)\ln(1-x)]$ şi construim:

(4) $H(A) = K \sum_{i=1}^{n} S(\chi_{A_1}(a_i))$ — entropia mulţimii fuzzy A

(se poate arăta că această definire a lui $H(A)$ satisface condiţiile necesare pentru a defini gradul de imprecizie în cunoaşterea mulţimii fuzzy A_1) — deci cantitatea de informaţie măsurată de $H(A_1)$ este o descriere fuzzy a fenomenului şi este evidentă deosebirea de situaţia din teoria informaţiei, cînd ea provine din incertitudinea în previziunea rezultatelor posibile a unei experienţe aleatoare).

Obs. De remarcat deasemenea că în timp ce pentru calculul entropiei probabilistice se dispune de o anume precizie (p_i fiind cunoscute - destul de exact practic), calculul entropiei vagi este relativ, relativitatea care vine din apariţia $\chi_{A_1}(a_i)$, care sînt fixate practic după un criteriu subiectiv. Deci problema calculului entropiei semantice rămîne spinoasă, întrevăzîndu-se doar posibilitatea de a ne apropia prin aproximări cît mai potrivite de unele rezultate, care să ne spună totuşi ceva (cît mai mult) în legătură cu aceste aspecte)

În sfîrşit putem introduce

(5) $M(A_1, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, S(\chi_{A_1}(a_i))$ — media statistică a informaţiilor obţinute prin precizarea exactă a elementelor a_i şi în fine entropia totală

(6) $\boxed{H_t = \underbrace{H(p_1, \dots, p_n)}_{\text{entropia probab.}} + \underbrace{M(A_1, p_1, \dots, p_n)}_{\text{media statistică a entropiilor vag}}}$

(în ipoteza că putem separa practic aspectul vag de cel probabilistic)

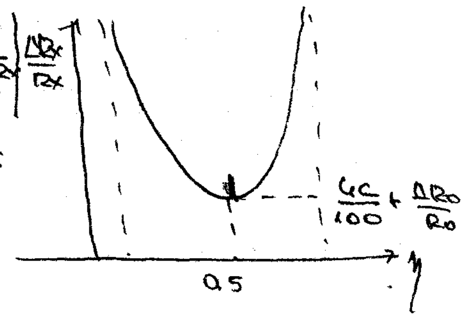
2.2 Aplicații (3)

(a) Se cunoaște că rezultatele unei măsurări (directe sau indirecte) sunt întotdeauna susceptibile la erori (în acest sens principiul de incertitudine a lui Heisenberg ar putea constitui un motiv pentru a afirma generalitatea situației)

Ex 3 Se lucrează în această situație așa numitul calcul al erorilor. Vom lua ca exemplu măsurarea unei rezistențe cu ohmetrul, măsurare pentru care se obține:

$$\boxed{\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{C}{100\eta(1-\eta)}} \quad \text{cu } \eta = \frac{R_0}{R_0+R_x}$$

sau grafic:



Considerăm de exemplu că se obțin rezultatele:

$$R = \{\overset{R_1}{0.1\,k\Omega},\ \overset{R_2}{0.5\,k\Omega},\ \overset{R_3}{0.8\,k\Omega},\ \overset{R_4}{1\,k\Omega},\ \overset{R_5}{2\,k\Omega},\ \overset{R_6}{3\,k\Omega},\ \overset{R_7}{4\,k\Omega},\ \overset{R_8}{100\,k\Omega}\}$$

și că $C = 1$, $\frac{\Delta R_0}{R_0} = \frac{1}{100}$, $R_0 = 1k\Omega$ și notând cu $\varepsilon_x = \frac{\Delta R_x}{R_x}$ ⇒

$$\cancel{\Rightarrow \left\{ \frac{\Delta R_1}{R_1} = \ \ldots\ \frac{\Delta R_4}{R_4} = 5\%,\ 5{,}5\% \right\}}$$

$$\varepsilon = \{12{,}1\%,\ 5{,}5\%,\ 5{,}05\%,\ 5\%,\ 5{,}5\%,\ 6{,}3\%,\ 7{,}2\%,\ 103\%\}$$

Acum apare acest aspect esențial:

Mulțimea $R_x = \{R_{x1}, R_{x2}, \ldots R_{x8}\}$ - a valorilor reale a rezistențelor măsurate e o mulțime nonfuzzy.

Mulțimea : $R = \{R_1, \ldots R_8\}$ - a valorilor măsurate ale rezistențelor e o mulțime nonfuzzy

În ce măsură însă mulțimea R a valorilor măsurate reprezintă mulțimea R_x a ~~rezistențelor~~ valorilor reale? În acest sens, considerăm că elementul R_i reprezintă ~~valoarea~~ valoarea exactă R_{xi} într-o măsură mai mare sau mai mică, după cât de mare este valoarea lui $\frac{\Delta R_x}{R_x}$. (.

Observații

1. Precizarea lui $\frac{\Delta R_x}{R_x}$ nu e decât o margine superioară a erorii și nu exact eroarea, deci prin adăugarea ei la

valoarea Ri nu putem obține Rxi. Vagul nu este deci demistificat.

2. În acest moment putem să alegem funcția de apartenență $\mathcal{X}$ în mod subiectiv, după utilizările dorite, ținând cont totuși de o anume obiectivitate ce este cuprinsă în nivelul maxim al erorilor ce pot apare respectiv.

Să presupunem că ne declarăm „mulțumiți" cu o eroare de până la 5%. Ar fi naturală de exemplu o astfel de definire a apartenenței la mulțimea valorilor reale:

$$\mathcal{X}_R(x) : R_{x_i} \to [0.1] \text{ este } \mathcal{X}_R = \left\{\frac{5}{12,1}, \frac{5}{5,5}, \frac{5}{5,05}, \frac{5}{5}), \frac{5}{5,5}, \frac{5}{6,2}, \frac{5}{7,3}, \frac{5}{10,3}\right\}$$

și am putea calcula entropia (vezi rel 4)

$$H(R) = -\sum_{i=1}^{n} S(\mathcal{X}_R(Ri)) = -\Big[(0.41 \ln 0.41 + 0.59 \ln 0.59) + (0.909 \ln 0.909 + 0.081 \ln 0.81) + [0.99 \ln 0.99 + 0.01 \ln 0.01] + 0 + (\ldots\ldots \Big] = 2,67 \text{ biți}$$

(b) Să presupunem acum că facem studiul unui lot combinat de rezistențe, care formează câmpul:

$$R = \{R_1 = 1k\Omega,\ R_2 = 2k\Omega,\ R_3 = 3k\Omega,\ R_4 = 0.5k\Omega,\ R_5 = 0.1k\Omega\}$$

cu

$$P = \{p_1 = \tfrac{1}{2},\ p_2 = \tfrac{1}{6};\ p_3 = \tfrac{1}{6},\ p_4 = \tfrac{1}{12},\ p_5 = \tfrac{1}{12}\}$$

(unde R e mulțimea valorilor ce pot rezulta la măsurare - și nu cele reale ale rezistențelor)

Putem calcula:

$$H = -\sum_{i=1}^{5} p(Ri) \ln p(Ri) = 1,32 \text{ biți}$$ (cantitatea de inf. obținută prin precizarea ~~...~~ rezistenței care a fost aleasă)

$$M(R|p_1 \ldots p_5) \overset{(5)}{=} -\sum_{i=1}^{5} p_i \left[\mathcal{X}(Ri) \ln \mathcal{X}(Ri) + (1-\mathcal{X}(Ri)) \ln(1-\mathcal{X}(Ri))\right] = 0.20 \text{ biți}$$

$$\Rightarrow \quad H_{total} \overset{(6)}{=} H + M_{medie} = 1,52 \text{ biți}$$

(reprez. cantit. de inf. eliberată la precizarea cărei rezistențe a fost aleasă și a valorii sale exacte)

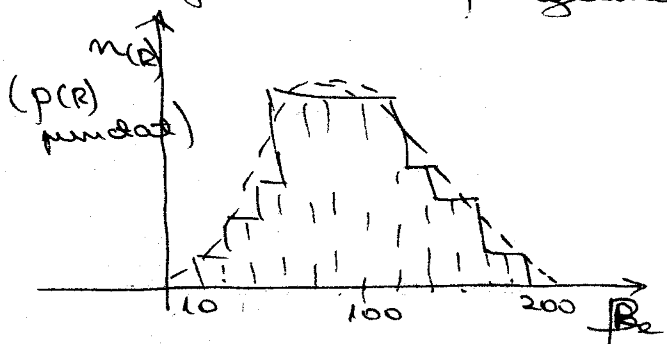
Observație!

Valorile rezistențelor și a erorilor sunt astfel încât nu se poate produce prin măsurare confundarea unei rezistențe cu alta, astfel încât aspectul vag și cel probabilistic sunt separabile.

Cazul general prezintă desigur dificultăți.

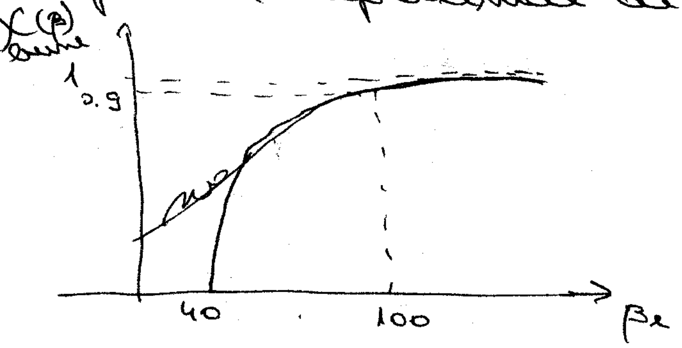
(b) Deseori, atunci când facem controlul statistic al unor produse, nu ne interesează să ~~sap~~ analizăm dacă „valoarea X măsurată este mai mare ca X_0" etc ci „dacă produsul analizat este bun" - dintr-un punct de vedere care adesea poate cuprinde ceva vag (de exemplu în problemele de design)

Apare deci pe lângă caracterul statistic al analizei lotului, rezumat să spunem de histogramă:



(presupun spre exemplu analiza unui lot de tranzistori ~~[illegible]~~) din punctul de vedere a lui β dinamic)

caracterul vag legat de „gradul de apartenență a tranzistoarelor ~~[illegible]~~ la „mulțimea tranzistoarelor bune" și care poate fi aproximat cu o „funcție de apartenență":



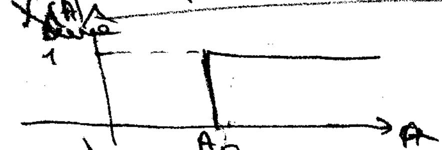
(gradarea apartenenței tranzistoarelor la mulț. „tranzistoarelor bune" (vagă).

Conjugând cele două aspecte am putea face calculul

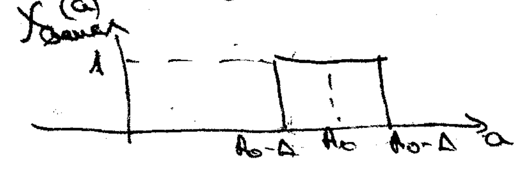
$$P(\text{tranz. bune}) = \int_0^\infty \chi_{bune}(\beta)\, p(\beta)\, d\beta$$

- probabilitatea evenimentului vag (vezi relația 1)

(c) În același sens ca la (b), să remarcăm că aceasta este situația generală întâmpinată, doar că se aleg forme foarte particulare a funcției χ:



„bune" = „să fie mai mari ca A_0"



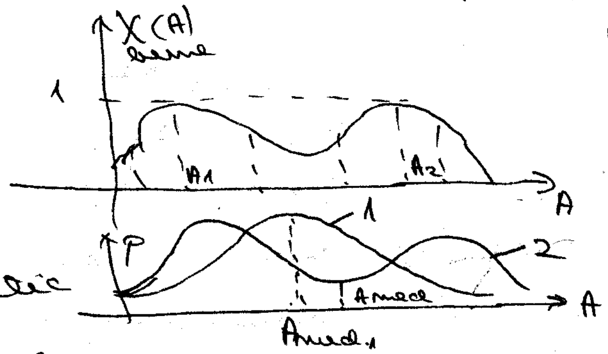
„bune" = „să fie între $A_0-\Delta$ și $A_0+\Delta$" (cazul toleranțelor)

Intrevedem deci posibilitatea de a lucra în situațiile în care criteriile sînt vagi (ceea ce apare mai ales în cazul sistemelor complexe), caz în care se poate stabili cît mai avantajos funcția X de apartenență la „mulțimea pieselor bune" și de a conjuga acest grafic, cu cel obținut prin analiza statistică a lotului.

Observații

1) Ar putea apărea și aici și vagul rezultat din imprecizia măsurării (vezi punctul (1))

2) Dacă aproximarea vagului prin X ia de exemplu forma:

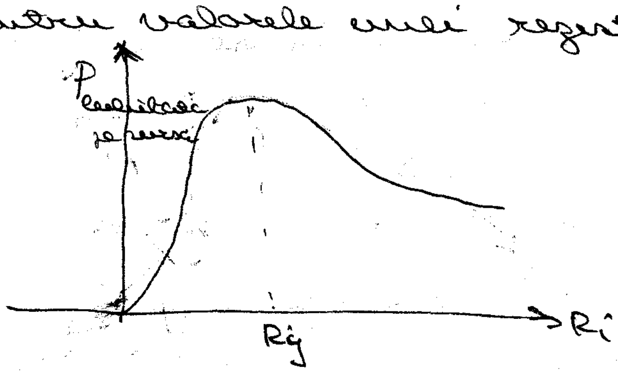


(pornindu-se subiectiv de la rezultatele obiective - adică relații ~~toate~~ în care intră mărimea A)

și cel statistic

o neglijarea aspectului vag poate duce la greșeli: spre exemplu - valoarea medie a lotului considerat (2) - este Amed2 și ne-ar informa - suprapusă pe $X(A)_{bune}$ că lotul nu este bun, ceea ce este greșit. Corectă e considerarea integralei (vezi 1) $\int X_{bune}(A)\, p(A)\, dA$.

(d) Exemplul 5: Pentru adaptare se obține pentru graficul pentru valorile unei rezistențe:



- grafic (obiectiv) care poate constitui baza unor aprecieri subiective pentru „mulțimea rezistențelor bune din punct de vedere al adaptării", și care pot fi conjugate cu calculul statistic, atunci cînd ~~și se dau~~ facem analiza unui lot de rezistențe.

(3) Concepte vagi în teoria sistemelor

(Aplicație: Definiții fuzzy a unor concepte de fiabilitate)

3.1 Sistem discret clasic (definiție).

Sistem – " – : (X, Y, S, f, g) — X - intrări, Σ stări; Y - ieșiri

$$\begin{cases} f : S \times X \to S \text{ - f-ția de tranziție a stării} \\ g : S \times X \to Y \text{ - f-ț de transfer} \end{cases}$$

dat în forma ecuațiilor de stare

$$\begin{cases} s_{t+1} = f(s_t, x_t) \\ y_t = g(s_t, x_t) \end{cases}$$

Dacă sistemul este nedeterminist se pot defini o mulțime de ieșiri

$$\begin{cases} S^{t+1} = \{ F(s_t, x_t) / s_t, x_t \text{ fixate} \} \\ Y^t = \{ G(s_t, x_t) / s_t, x_t \text{ fixate} \} \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} F : S \times X \to S \\ G : S \times X \to Y \end{cases}$$

3.2. Sistem fuzzy. (definiții)

Def Un sistem (X, Y, S, f, g) este fuzzy dacă mulțimile S^{t+1}, Y^t sînt mulțimi fuzzy.

El va putea fi caracterizat de funcț. de apartenență

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{S^{t+1}}(s_{t+1} / s_t, x_t) \\ Y_{y^t}(y_t / s_t, x_t) \end{cases} \quad \text{cu } s_t, x_t \text{ date.}$$

Desigur apariția stărilor vagi va duce la necesitatea definirii în continuare:

$$\left(\mathcal{X}_{S^{t+1}} \overset{\text{presc}}{=} \mathcal{X}_S \right) \quad \begin{cases} \mathcal{X}_S(s_{t+1}) = \sup_{s_t \in S} \min [\mathcal{X}_S(s_t), \mathcal{X}_S(s_{t+1} / s_t, x_t)] \\ \mathcal{X}_S(y_t) = \sup_{s_t \in S} \min [\mathcal{X}_S(s_t), \mathcal{X}_Y(y_t / s_t, x_t)] \end{cases}$$

și continuînd pentru momentele ulterioare

$$\mathcal{X}_S(s_{t+2}) = \sup_{s_{t+1}} \min [\mathcal{X}_S(s_{t+1}), \mathcal{X}_S(s_{t+2} / s_{t+1}, x_{t+1})] =$$

$$= \sup_{s_{t+1}} \min \left[\sup_{s_t} \min (\mathcal{X}_S(s_t), \mathcal{X}(s_{t+1} / s_t, x_t)], \mathcal{X}_S(s_{t+2} / s_{t+1}, x_{t+1}) \right] =$$

$$= \sup_{s_t, s_{t+1}} \min [\mathcal{X}(s_t), \mathcal{X}(s_{t+1} / x_t), \mathcal{X}(s_{t+2} / s_{t+1}, x_{t+1})]$$

și analog pentru

$\mathcal{X}(y_{t+2})$, proces care continuă timp de p pași.

$$\mathcal{X}_{S^{t+p+1}}(s^{t+p+1}) = \sup_{s^t, s^{t+1}, \dots, s^{t+p}} \min\left[\mathcal{X}(s^t), \mathcal{X}(s^{t+1}/s^t, x^t), \mathcal{X}(s^{t+p+1}/s^{t+p}, x^{t+p})\right]$$

$$\mathcal{X}_{Y^{t+p}}(y^{t+p}) = \sup_{y^t, y^{t+1}, \dots, y^{t+p}} \min\left[\mathcal{X}(s^t), \mathcal{X}(y^{t+1}/s^t, x^t), \dots, \mathcal{X}(y^{t+p}/s^{t+p}, x^{t+p})\right]$$

Pentru cazul sistemelor fuzzy în care și intrarea este fuzzy se pot stabili formule de forma:

$$\begin{cases} \mathcal{X}_S(s^{t+1}) = \sup\limits_{x^t \in X} \min\left\{ \sup\limits_{s^t \in S} \min\left[\mathcal{X}_S(s^t), \mathcal{X}_S(s^{t+1}/s^t, x^t)\right]\right\} \\ \mathcal{X}_Y(y^{t+1}) = \sup\limits_{s^t \in S} \min\left\{ \sup\limits_{s^t \in S} \min\left[\mathcal{X}_S(s^t), \mathcal{X}_Y(y^t/s^t, x^t)\right]\right\} \end{cases}$$

(care ne dau fuzzy mulțimea ieșirilor și a stărilor, la trecerea de la un tact la altul, sub influența unei mulțimi vagi).

3.3. $\boxed{\text{Exemplu 7}}$

a) Să presupunem că un sistem logic obișnuit $\{X, Y, S, f, g\}$

X – mult. intrărilor : $\{0, 1\}$
Y – mult. ieșirilor : $\{0, 1\}$
S – mult. stărilor (eventual a unui bistabil : $\{0, 1\}$)

are f :

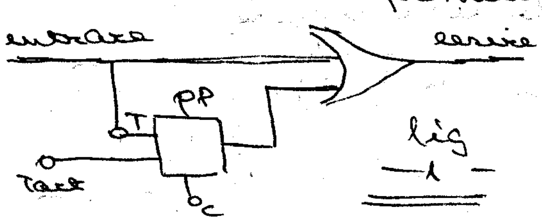
$$(1)\quad \begin{array}{c|c} x_k s_k & s_{k+1} \\ (0,0) & \to 0 \\ (0,1) & \to 1 \\ (1,0) & \to 1 \\ (1,1) & \to 0 \end{array}$$

(intrarea 1 schimbă starea bistabilului iar 0 o lasă neschimbată)

$$g\ (2)\quad \begin{array}{c|c} x_k s_k & y_k \\ (0,0) & \Rightarrow 0 \\ (0,1) & \Rightarrow 1 \\ (1,0) & \Rightarrow 1 \\ (1,1) & \Rightarrow 1 \end{array}$$

(se efectuează „sau logic" între intrare și starea bistabilului la momentul t)

Sau implementat cu un bistabil T și un sau:



(implementarea sistemului cu caracteristicile f, g)

b) Dacă, pentru un motiv sau altul stările interne devin vagi (de exemplu stările degenerate ale bistabilelor) am putea să întâlnim un sistem (altul decât 1), care să aibă caracteristicile:

1) " intrarea 0, ~~schimbă~~ lasă în linii mari (aproximativ) starea precedentă și intrarea 1 o schimbă (tot aproximativ" (pentru logica de transfer a stărilor)

2) ~~Se~~ Se realizează în general (aproximativ) aceeași logică pentru trecerea (intrare, stare) → ieșire.

<u>Deci</u>: Schema din fig 1 funcționează cu imprecizie.

Am putea atunci caracteriza situația (spre exemplu) în felul următor:

~~$\chi_s(0/0,0)=1$~~

~~$\chi_s(1/0)=0.1$~~

$$\begin{cases}\chi_s(0/0,0)=1\\ \chi_s(1/0,0)=0.1\end{cases}\quad \chi_s(0/0,1)=0.1\quad \chi_s(0/1,0)=0.1\quad \chi_s(0/1,1)=1$$

$$\chi_s(1/0,1)=1\quad \chi_s(1/1,0)=1\quad \chi_s(1/1,1)=0.1$$

$$\begin{cases}\chi_y(0/0,0)=1\\ \chi_y(1/0,0)=0.1\end{cases}\quad \chi_y(0/0,1)=0.2\quad \chi_y(0/1,0)=0.2\quad \chi_y(0/1,1)=0.1$$

$$\chi_y(1/0,1)=0.9\quad \chi_y(1/1,0)=0.9\quad \chi_y(1/1,1)=1$$

Și deci am putea calcula cu relațiile

$$\chi_s(1)=\sup\{\min(\chi_s(0),\chi_s(1/0,x_1)),\ \min(\chi_s(1),\chi_s(1/1,x_1))\}$$

(pentru x_1 dat)

$$\chi_s(0)=\sup\{\min(\chi_s(0),\chi_s(0/0,x_1)),\ \min(\chi_s(1),\chi_s(0/1,x_1))\}$$

și respectiv pentru ieșiri

(Se obțin relații de recurență în care intervin <u>intrările</u> la mom: 0, 1, 2, ------) și starea inițială, ce o putem considera vagă.

Să <u>considerăm de exemplu starea inițială vagă</u>

$$S_0:\ \{\chi_s(0)=0.9\quad \chi_s(1)=0.2\}$$ ~~(bistabilul este aproape aproximativ 1)~~

și intrarea vagă: " se intră în general cu 1", sau " se intră cu 1 sau 0" (ipoteza că intrarea e de exemplu ieșire pentru un bistabil în stare degenerată. Deci

$$\chi(1)=0.5\qquad \chi(0)=0.5.$$

⇒ putem calcula cu formulele ~~aici~~ scrise

$$\mathcal{X}_{Y}(y_1) = \sup_{x_0 \in X} \min\{(\sup_{s_0 \in S} \min(\mathcal{X}_S(s_0), \mathcal{X}_{Y_1}(s_0, x_0))), \mathcal{X}_X(x_0)\}$$

Deci

$$\boxed{\mathcal{X}_{Y_1}(0)} = \sup\{\min[\sup(\min(\mathcal{X}_S(0), \mathcal{X}_Y(0/0,0)), \min(\mathcal{X}_S(1), \mathcal{X}_Y(0/1,0))], \mathcal{X}_X(0)], \min[\sup(\min(\mathcal{X}_S(0), \mathcal{X}_Y(0/0,1)), \min(\mathcal{X}_S(1), \mathcal{X}_Y(0/1,1))], \mathcal{X}_X(1)\} =$$

$$= \sup\{\min[\sup\{\overset{0.9}{\overline{\min(0.9, 1)}}, \overset{0.2}{\overline{\min(0.2, 0.2)}}\}], 0.5],$$

$$\min[\sup(\overset{0.2}{\min(0.9, 0.2)}, \overset{\min}{(0.2, 0.1)})], 0.5]\} =$$

$$= \sup\{\min(0.9, 0.5), \min(0.2, 0.5)\} = \sup\{0.5, 0.2\} = \boxed{0.5}$$

La fel putem calcula și

$$\boxed{\mathcal{X}_{Y_1}(1)} = \sup\{\min[\sup \underline{\min}(\overset{0.1}{\overline{0.9, 0.1}}), \min(\overset{0.2}{\overline{0.2, 0.9}})], 0.5)$$

$$\min[\sup \min(0.9, 0.9), \min(0.2, 1), 0.5] =$$

$$= \sup\{0.2, 0.5\} = \boxed{0.5}$$

și calculele pot fi continuate pentru a obține la diverse tacte ieșirile și stările vagi.

Observație

Pot fi implementate ușor circuite care să efectueze rapid calculele de tipul celor ce apar, într-un timp scurt ⇒ analiza unor sisteme vagi, cu anumit nivel de subiectivitate. (care poate fi dirijat fi modificat).

3.4. Definiția fuzzy a fiabilității

În exemplul anterior, am fi putut caracteriza „ieșirile admisibile" a sistemului considerat, ca acelea pentru care $Y \subset_{vag} Y_1$ unde Y_1' o mulțime vagă de ieșire permise (care poate fi vagă, de exemplu $Y: \begin{cases} \mathcal{X}_Y(0) = 0.7 \\ \mathcal{X}_Y(1) = 0.9 \end{cases}$.

Se vede că $\mathcal{X}_{Y_*}(0) = 0.5 \geq \mathcal{X}_{Y_1}(0)$, deci de la ~~după~~

premultare se ajunge într-o ~~st~~ eroare „inadmisibilă"!!

Considerăm că sunt deci create premisele înțelegerii utilității definirii fiabilității astfel:

1) Numim starea $\overline{\sigma}_{\varphi}$ fiabilă, acea stare a sistemului care satisface $\{ g(\sigma_{\varphi}, X_{\varphi}) = Y_{\varphi}$ cu $Y_{\varphi} \subset_{fuzzy} Y' \to$ mulțimea vagă a erorilor perm.

2) (interval de)
să vom numi timp de bună funcționare $\mathcal{I}$, ~~acel~~ un interval de timp $[0,T]$ ~~în care~~ ai

$\{ f(\overline{\sigma}_t, x_t) = \overline{\sigma}_{t+1}$ – fiabilă, $\forall t \in [0,T]$
$(\overline{\sigma}_0$ fiabilă$)$

3) fiabilitatea unui sistem $\sum'$, mulțimea tuturor stărilor (~~fiabile~~) pe care le are sistemul pe perioada timpului de funcționare

$$\sum_1 = \{ \sigma_t \mid \text{cu } t \in [0,T] \}$$

(aceasta fiind definiția pentru un ~~a~~ sistem analizat cu timpul discretizat; generalizarea e evidentă)

Observații

1) Putem generaliza aceste definiții, definind

$\sum_1 = \{ \sigma_0 \mid \sigma_0 \text{ este fiabilă} \}$ (fiabilitatea) (fără ~~ca~~ a mai impune funcționarea continuu corespunzătoare a sistemului)

2) În definiția de mai sus, pot fi vagi !!

- mulțimea intrărilor
- — " — erorilor
- — " — stărilor
- relațiile de trecere f, g.