## Ⓑ Obținerea și demonstrarea ecuației $AF(x)+Bx=C$

Notă: din acest paragraf vor fi date doar niște elemente, lucrul succint (pentru detalii v. bibliogr. (art 12, 13, 14, 18, [0])).

### ① Obținerea ecuației circuitului liniar cu sursă G.

Ideea de bază e aceea că atunci când nu există o matrice G pentru multipolul liniar, să folosim caracterizarea sa hibridă: (v. ref. 10 pag 227)

(86) $$y = Hx + c$$

unde $\begin{cases} y_k = v_k \text{ sau } i_k \\ x_k = i_k \text{ sau } v_k. \end{cases}$

Pentru claritate, vom nota ~~că~~ indicii pentru care y sunt tensiuni cu $\tilde{N}$ și cu $\hat{N}$ cei ~~pentru~~ pentru care y sunt curenți adică

(87) $$\begin{cases} y_k = v_k, \quad x_k = i_k & \text{pentru } k \in \tilde{N} \\ y_k = i_k, \quad x_k = v_k & \text{pentru } k \in \hat{N} \end{cases} \qquad (87)$$

unde $\tilde{N} \cup \hat{N} = \{1, \ldots, \underset{n}{\underset{\shortparallel}{2p+2}}\}$ $\quad \tilde{N} \cap \hat{N} = \{\phi\}$

Teorema 1 (A) ~~de la pag A~~ ne asigură că $\forall$ n-port liniar are o astfel de caracterizare.

Mai departe să folosim $\boxed{\text{formalismul } \cancel{\text{notația} } \text{ lui Belevitch}}$, pe care îl vom ~~simplifica~~ dezvolta, pentru claritate.

Să notăm $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad i = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} \qquad (88)$

notând că pentru $\begin{cases} x = v, & H = \text{numai} \to G - \text{matricea admitanță} \\ x = i & \to H = \text{numai } R. \end{cases}$

Dacă însă nu există nici G, nici R, vom fi obligați să apelăm la o caracterizare hibridă, adică nici $\hat{N}$, nici $\hat{N}$ nu sunt nule.

Numai pentru ușurința expunerii să presupunem că am aranjat astfel ecuațiile încât primii k-și sunt curenți și restul de n-k tensiuni. Deci

Ne vom referi la respect la multiporți fără surse de tensiune. Relația este deci:

$$Y = H\,x \quad \text{sau} \qquad (89)$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ i_{k+1} \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} \qquad (90)$$

(91)

$$\left\{\begin{array}{l} i_1 = h_{11} v_1 + h_{12} v_2 \ldots + h_{1k} v_k + h_{1k+1} i_{k+1} \ldots + h_{1n} i_n \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ i_k = h_{k1} v_1 + h_{k2} v_2 \ldots + h_{kk} v_k + h_{kk+1} i_{k+1} + \ldots + h_{kn} i_n \\ v_{k+1} = h_{k+1,1} v_1 + h_{k+1,2} v_2 \ldots + h_{k+1\,k} v_k + h_{k+1\,k+1} i_{k+1} \ldots + h_{k+1,n} i_n \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ v_n = h_{n1} v_1 + h_{n2} v_2 + \ldots + h_{nk} v_k + h_{n\,k+1} i_{k+1} + \ldots + h_{nn} i_n \end{array}\right. \qquad (91)$$

(92) Sau:

$$\left\{\begin{array}{l} i_1 - h_{1k+1} i_{k+1} - \ldots - h_{1n} i_n = h_{11} v_1 + \ldots + h_{1k} v_k \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ \cancel{i_2 - h_{2k+1} i_{k+1} \ldots - h_{2n} i_n = h} \\ i_k - h_{kk+1} i_{k+1} \ldots - h_{kn} i_n = h_{k1} v_1 \ldots + h_{kk} v_k \\ - h_{k+1\,k+1} i_{k+1} \ldots - h_{k+1\,n} i_n = h_{k+1\,1} v_1 \ldots + h_{k+1\,k} v_k - v_{k+1} \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ - h_{n\,k+1} i_{k+1} \ldots - h_{nn} i_n = h_{n1} v_1 + \ldots + h_{nk} v_k - v_n \end{array}\right. \qquad (92)$$

unde nu am făcut decât să luăm noile laturi ~~și porți~~ dintr-o parte și în alta. ~~Atunci avem~~

Relația (92) poate fi scrisă condensat:

$$(93)\quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & -h_{1k+1} & \cdots & -h_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & -h_{kk+1} & \cdots & -h_{kn} \\ & & & -h_{k+1k+1} & \cdots & -h_{kn} \\ & 0 & & & & \\ & & & -h_{nk+1} & \cdots & -h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \\ \\ i_n \end{pmatrix} \overset{(93)}{=} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1k} & & & \\ & & & & 0 & \\ h_{k1} & \cdots & h_{kk} & & & \\ h_{k+11} & \cdots & h_{k+1k} & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ h_{n1} & \cdots & h_{nk} & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \\ \\ v_n \end{pmatrix}$$

Aceasta a fost ideea lui Belevitch. Ea permite deci ca acestei caracterizări hibride de tipul:

$$\boxed{y = Hx} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} y_k = v_k \text{ pt } k \in \hat{N} - \text{la noi } \hat{N} = \{1, 2, \dots k\} \\ y_k = i_k \text{ pt } k \notin \hat{N}, \ (\text{la noi } (k+1, \dots n)) \end{cases}$$

să-i corespundă o caracterizare de tipul:

$$\boxed{\Phi \cdot i = P \cdot v} \quad (94)$$

unde așa cum am văzut mai sus, dacă $\underset{(95)}{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$

unde prin $H_{ik}$ am reprezentat matricile liniare de tip rezistiv, caracteristic rețea hibridă $\angle_h$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1_1 & -H_{12} \\ 0 & -H_{22} \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} H_{11} & \\ H_{21} & -1_2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

și $[1_1, 1_2] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$ este matricea unitate (97)

~~Deci~~ Exact la fel se arată că orice multiport liniar, în care sunt prezente surse independente, care are deci o caracterizare

$$\boxed{y = Hx + c} \quad (98)$$ are și o

caracteristica de tipul

$$\boxed{Pv = Qi + c} \quad (99)$$

cu $P$ și $c$ obținute ca mai sus, iar $c$ ține cont de prezența surselor.

**Remarcă** ~~Remarcări~~ să în scrierea relațiilor (99) nu e obligatoriu necesar să le deducem din relația biliniară (98). Deoarece ele vor rezulta foarte ușor printr-o aranjare atentă, într-o parte și alta a termenilor ecuațiilor unui circuit liniar.

Continuarea este acum la fel ca la ~~din~~ par. precedente (metoda tensiunii). Avem:

$$\begin{cases} Pv' = Qi' + c \ (99) & \text{(ecuația liniară)} \\ i = T F(v) \\ v = \hat{v} - Ri \end{cases} \ (42) \quad \text{ecuația neliniară}$$

$$\begin{cases} i' = -i \\ v' = \hat{v} \end{cases} \ \begin{pmatrix} 54 \\ 57 \end{pmatrix} \quad \text{(relația agendă)}$$

Se ajunge imediat la ecuația:

$$\boxed{(PR + Q)T F(x) + Qx = c} \quad (100)$$

adică, un caz particular al ecuației

$$\boxed{A F(x) + Bx = c} \quad (101)$$

Astfel, ne-am atins scopul propus în paragraful precedent. Atunci când $G$ sau $R$ nu vor exista pentru multipolul liniar, vom putea scrie totdeauna ecuația în forma (100).

Când $G$ există dar $(1 + RG)^{-1}$ nu, am văzut că se ajunge din nou la o ecuație de tip 101. Acesta este maximul pentru care se verifică inegal.

## (2) Definirea claselor de perechi de matrici

Matricile A, B care apar în ecuația (101) vor juca și în teoremele de calitate ca ex. un rol similar celor jucate de A, pentru ecuația

$$F(x) + Ax = B \quad (102)$$

Cum, dacă în ecuația

$A F(x) + Bx = C$ există $A^{-1}$, o putem și aduce la forma (102) prin înmulțire cu $A^{-1}$:

$F(x) + A^{-1}Bx = A^{-1}C$ (Obs: de fapt așa am și procedat pentru clasa ecuațiilor $T F(x) + Gx = B$)

este evident că putem folosi în continuare toate rezultatele de la ~~punct~~ par. ©. Să reținem prudența că va fi important dacă $A^{-1}B \in P_0$.

Totuși în general, nu vom putea face această operație. Mai clar:

**Observație fundamentală**: Nu există $A^{-1}$ și $B^{-1}$ pentru multiporți care nu admit nici matrice G, nici R. ⇒ „multiporți critici"

Într-adevăr, cum

$Pv = Qi + c$ (99). Dacă ar exista $P^{-1}$, am avea $v = P^{-1}Qi + P^{-1}c$, și deci o caracterizare prin $G = P^{-1}Q$.

Analog pentru $Q^{-1}$.

Deci, în cazul acestor multiporți „critici", [illegible] rilități să luăm în considerație ecuația (101)

$AF(x) + Bx = c$ fără a fi posibilă nici o modificare ($\det A = \det B = 0$), dacă un $\exists$ G și R

Din observația anterioară se vede că:

Nu există ~~∅~~ $A^{-1}$, dacă multipolinul nu admite G.

Astfel, va părea spre [illegible] trecerea la clasa de „perechi de matrici”, de altfel analoagă clasei $P_0$;

Pentru clasele pe care le vom defini $W_0$, ~~W~~, una din proprietățile de mai jos poate fi considerată definiție, restul teoreme, prop. fiind echivalente:

Proprietățile clasei $W_0$, de perechi de matrici $(A, B)$

(1) $\det(AD + B) \neq 0$ $\forall$ D diagonală $> 0$.

(2) $\forall x \neq 0$, $\exists$ un indice k a.î.

$(A^T x)_k \neq 0$ sau $(B^T x)_k \neq 0$ și $(A^T x)_k (B^T x)_k \geq 0$.

(3) $\forall x \neq 0$, $\exists$ o matrice diagonală $D_x > 0$ a.î., sau $\langle A^T x, D_x A^T x \rangle > 0$ sau $\langle B^T x, D_x B^T x \rangle > 0$ și a.î. $\langle A^T x, D_x B^T x \rangle \geq 0$

(4) Înainte de a da și alte prop. echivalente cu (1), (2), (3) să introducem notațiile $\boxed{\varphi(A,B)}$ mulțimea tuturor matricilor formate din coloane alăturate, luate din A sau din B, adică

$M \in \varphi(A,B) \Leftrightarrow M_K$ (coloana a K-a) $= A_K$ sau $M_K = B_K$ (aceeași proces amintit la pagina anterioară și la form. [illegible]).

Putem din nou nota $\tilde{N}$ indicii k a.î. $M_K = A_K$ și cu $\tilde{N}'$, k a.î. $M_K = B_K$. De asemenea $\overline{M}$, complementara lui M va fi o matrice formată „pe dos” ca M: $M_K = A_K \Rightarrow \overline{M}_K = B_K$; $M_K = B_K \Rightarrow \overline{M}_K = A_K$.

Aceste două perechi $(M, \bar{M})$ se numesc perechi complementare

Acum putem adăuga următ. prop. echivalente, care sunt desigur mai utile practic:

(4) $\exists$ o matrice $M \in \mathcal{C}(A,B)$ a.î. $\det M \neq 0$ și

$$\det M \cdot \det N \geq 0 \quad \forall N \in \mathcal{C}(A,B)$$

(5) $\forall M, N$ o pereche complementară din $\mathcal{C}(A,B)$, orice valoare $\lambda$ care satisface $\det(M - \lambda N) = 0$ este nenegativă

(analoagă prop. cu valorile proprii)

$\boxed{(6)}$ Există o pereche $(M, N)$ din $\mathcal{C}(A,B)$ a.î. $M^{-1}N \in P_0$

(7) $\exists M \in \mathcal{C}(A,B)$ a.î. $\det M \neq 0$ și $\forall$ o pereche complementară $M, N \in \mathcal{C}(A,B)$ cu $\det M \neq 0$, $M^{-1}N \in P_0$.

Ultimele relații sugerează legătura cu matricele $P_0$ și demonstrațiile lor conțin aspecte locale relevante asupra întregii probleme. Nu le dăm aici această demonstrație, dar schițez ideea.

Se pornește de la

$\det(AD + B)$, unde $D = \mathrm{diag}(d_1 \dots d_n)$ și se dezvoltă ca o polinomială: $c_0 d_1 \dots d_n + c_1 d_1 \dots d_{n-1} + \dots + c_{2^n-2} d_n + c_{2^n-1}$

Apoi se analizează semnul polinomialei, care e același $\forall d_i$ numai dacă toți coeficienții au același semn.

Legătura dintre (1) și (4) reiese din faptul că acești coeficienți se dovedesc a fi tocmai determinanții a unor matrici din $\mathcal{C}(A,B)$ $\Rightarrow$ toți acești det trebuie să aibă același semn și unul să fie $\neq 0$ (Pt ca polin. să fie $> 0$ ~~[illegible]~~

Mai departe, pentru acei $M \in \mathcal{C}$ aî $\det M > 0$, asociindu-se complementul său $\tilde{M} = N$, se arată ușor că $M^{-1}N \in P_0$, căci această relație e echivalentă cu $\det(M^{-1}N + D) \neq 0 \ \forall D$ $\Leftrightarrow \det(MD + N) \neq 0$ (înmulțind cu $\det M \neq 0$)

Ori, ultima relație este nepărăsibilă, căci $M$ și $N$ nu sunt decât $A$ și $B$, cu unele coloane „inversabile"!

O altă clasă de perechi care ar putea fi folositoare este clasa <u>perechilor pozitive</u> $(A, B)$, adică acelea pentru care $Ax = By \Rightarrow \langle x, y \rangle > 0$. ~~În general~~ De exemplu, ~~A~~ dacă $A, B$ ~~sunt~~ sunt $P, Q$ ale multiportului liniar, aceasta urmă e automat îndeplinită, din condiția de pozitivitate a multiportului.

$\boxed{\text{Lemă B}}$. O pereche pozitivă $(A, B) \in \mathcal{X}_0$.
(se arată ușor).

Vom mai avea nevoie și de $\boxed{\overline{\mathcal{X}_0}}$ (analogul lui $\overline{P_0}$)
cu proprietățile:

1) $(A, B) \in \mathcal{X}_0$
2) $\forall D$ diagonală cu $d_k = \pm 1$ $\exists$ un vector $p$ aî
$$D A^T p \geq \theta, \quad D B^T p \geq \theta \text{ și } D(A+B)^T p > \theta.$$
(amintesc că $v \geq \theta \Rightarrow v_k \geq 0 \ \forall k$)

Se stabilește și lema:

$\boxed{\text{Lema 4}}$ 1) Dacă $(A, B)$ e o pereche pozitivă, atunci $(A, B) \in \overline{\mathcal{X}_0}$
2) Dacă $(A, B)$ are prop. că pentru o anumită matrice nesingulară $M$, $MA$, $MB$ sunt slab dom. ~~de ...~~ pe ~~toate~~ col iar $M(A+B)$ e tare dom ~~d~~ pe coloane, atunci $(A, B) \in \overline{\mathcal{X}_0}$

Pentru ele avem teoremele (analoage celor de la nr c), generalizându-le însă, căci e mutrebuie să facem $A = i$, pentru ca $(A, B) \in \mathcal{K}_0 \Leftrightarrow B \in P_0$.

Propr. (6) ne sugerează chiar calea obţinerii noilor teoreme.

## (3) Teoreme de existenţă şi unicitate

pentru ecuaţia $\boxed{AF(x) + Bx = C}$ (101)

~~Ex. de rezolvare~~ Exist. şi unicit.

**Teorema 14** Dacă $A$, $B$ sunt matrici reale $n \times n$ şi

1) $F \in \mathcal{F}^n$, atunci $\exists$ o soluţie, unică a ecuaţiei

$AF(x) + Bx = c \quad \forall \; c \in R^n$ dacă şi numai dacă

2) $(A, B) \in \mathcal{K}_0$.

Această teoremă are o mare importanţă, ea dă un răspuns cert la problema existenţei şi unicităţii oricărui circuit de tipul considerat (tranz, diode, rez, surse indep), indiferent dacă $\exists$ sau nu $G$.

Se cere doar ca $F \in \mathcal{F}^n$ (diode surjective).

**Teorema 15** (unicitate) Ecuaţia $AF(x) + Bx = c$ are pentru

1) $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$, dacă

2) $(A, B) \in \mathcal{K}_0$

cel mult o soluţie $\forall \; c \in R^n$.

În ceea ce priveşte partea numai dacă:

**Teorema 16** (de neunicitate) Ecuaţia $AF(x) + Bx = C$ are pentru

1) $F \in \mathcal{E}^n$ (de ex. diodele exponenţiale)

2) $(A, B) \notin \mathcal{K}_0$, două soluţii $x$, $y$ a.î.

$\|x - y\| = \delta, \; \forall \delta > 0$, pentru un anumit $c$.

În această exprimare echivalentă, ~~condiția (A, B)~~ (deci „avariocrescătoare": pt $|x-a|>R$ sunt crescătoare) pentru $\boxed{F \in \mathcal{F}_0(N)}$ se fac aceleași considerații ca în cazul ex. (64). În art (5) sunt stabilite rezultate suplimentare, foarte tari (analoagele t 12-13).

$\boxed{\text{Teorema 17}}$ (se zice tare) – Fie ~~F ∈~~ ecuația $AF(x)+Bx=c$ (vezi legea cor. 12 pag 290)

– 1) $F \in \mathcal{F}_0^n$

2) $(A, B) \in \overline{\mathcal{X}_0}$ (vezi pag 290)

Atunci ecuația are o soluție unică $\forall\, c \in E^n$

c.n.s.d. $S = B(F) \cap N(B) = \{0\}$

Dacă $B(F) \cap N(B) \neq \{0\}$, $\exists$ un $c$ pentru care nu avem soluție.

---

Mai multe vezi, pornindu-se de la lema:

$\boxed{\text{Lema 5}}$: Fie $M$ o aplicație continuă $R^n \to R^n$ cu proprietatea că există un real $0<r<1$ și $K>0$ a.î. $\forall z \in R^n$ cu $\|z\|>K \Rightarrow \|M(z)\| \le r\|z\|$. Atunci $\forall y \in R^n$, $\exists x \in R^n$ a.î. $x + M(x) = y$.

Se pot omite

$\boxed{\text{Lema 6}}$: Fie $U$ un homeomorfism $E^n$ pe $E^n$ și $V$ o aplicație continuă $R^n$ în $R^n$ cu propr. că $\exists\, 0<r<1$ și $K>0$ a.î. $\forall \xi \in R^n$ cu $\|\xi\| \geq K \Rightarrow \|V(\xi)\| \le r\|U(\xi)\|$. Atunci pentru orice $y \in E^n$, $\exists x \in E^n$ a.î. $U(x)+V(x)=y$.

Cu aceste leme, introduse pentru a putea lua în considerație dispozitive nemonotone (diode tunel de exemplu), care totuși sunt, în afara unui interval limită $|x_k|<\alpha$, strict crescătoare, adică funcțiile $\mathcal{F}_0^n$ „avariocrescătoare", se pot demonstra rezultatele:

$\boxed{\text{Teorema 17}'}$ (de existență) Dată Ecuația $AF(x) + Bv = c$ unde

1) $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$ (mărginit crescătoare)

2) $(A, B) \in \overline{\mathcal{K}_0}$

Atunci există cel puțin o soluție a lui (1) $\forall c \in \mathbb{R}^n$ dacă $B(F) \wedge \mathcal{N}(B) = \{0\}$.

Această teoremă este evident valoroasă și poate da un corolar

$\boxed{\text{Corolar 8}}$ (existență) Ecuația $F(x) + Ax = B$ unde

1) $F \in \overline{\mathcal{F}_0}^n$

2) $B \in \overline{P_0}$

are cel puțin o soluție, dacă $B(F) \wedge \mathcal{N}(A) = \{0\}$.

În sfârșit să menționăm că teorema și considerații ca ocuparea pasiv (global energetic) al ~~elementelor~~ tranzistoarelor, și considerarea ~~circuitelor~~, care conțin exclusiv surse de tensiune o dăm la următoarea teoremă. Corolarul lui T7, ce care o generalizează pentru ~~multiporții care au~~ circuitele a căror multiport liniar admite o reprezentare G.

$\boxed{\text{Teorema 7}'}$ — Dacă se presupun satisfăcute, în modelarea (existență) condițiile A1, ~~și~~ A+ $\langle x, TF(x) \rangle \geq 0$, $\forall x$ (pasivitate)

— $(P, Q)$ este o pereche pasivă (în ce dată această multip. a rezultat hibrid, sau Belevitch: $Pv = Qi + c$, și lăsând $c = 0$ (anulând sursele independente, rezultă din condiția de pasivitate a M.L., urmează ca $P, Q$ să fie o pereche pasivă)

— Atunci $\forall c \in R$, există cel puțin ~~un c~~ ~~ecuația circuitului să aibă~~ măcar o soluție !!

Observație: în prealabil ecuația este adusă la forma: $QTF(w + c') + Pw = \theta$, întrucât posibilitatea unei lipse surse de ~~tensiune~~

## (E) Rezultate privind continuitatea și mărginirea soluțiilor și calculul lor

Notă: Toate comentariile sunt lăsate în Cap III.

### 1. Teoreme privind continuitatea și mărg. soluțiilor

$\boxed{\text{Teorema 19}}$ (trebuie legată de T1)

In condițiile T1 pentru $F(x) + Ax = B$, admite:

1) $F \in \mathfrak{F}^n$

2) A slab dominantă pe linii

pe lângă concl. T1, putem găsi pe fiecare $k$: $\eta_k, \xi_k$ ai

$\eta_k < x_k < \xi_k$ (detalii T8 pag 191)

$\boxed{\text{Corolar 9}}$ în condițiile T19, dacă se dau:

$\alpha_k \leq b_k \leq \beta_k$ se pot găsi $\eta_k, \xi_k$ ai

$\eta_k \leq x_k \leq \xi_k$ (detalii T9 pag 195)

$\boxed{\text{Teorema 20}}$ (trebuie legată de T3)

Ecuația $F(x) + Ax = B$ unde:

1) $F \in \mathfrak{F}^n$

2) $A \in P_0$, are pe lângă propr. din concluzia lui T3,

1) Soluția $x$ depinde continuu de $B$ (de orice parametru de care $B$ depinde continuu.

2) Dacă $x_1, \dots x_n$ e mărginit, atunci cu $b_k = F(x_k) + A(x_k)$ și șirul $b_1, \dots b_n$ e mărginit

<u>Variantă</u>: 2') intrărilor mărginite B, le corespund ieșiri mărginite x

3) Dacă sunt date condițiile $\alpha_i \le b_i \le \beta_i$ se poate găsi constructiv (detalii T10 pag 198) un set de numere $\gamma_i, \delta_i$ ai

$\gamma_i \le x_i \le \delta_i \qquad i=1,\dots,n.$

Teorema următoare oferă o generalizare a acestor rezultate pentru cazul ecuației $AF(x)+Bx=c$

$\boxed{\text{Teorema 21}}$ (soluții legate de T14)

<u>Dacă</u> ecuația $AF(x)+Bx=c$ satisface:

1) $F \in \tilde{F}^n$

2) $(A, B) \in \mathcal{K}_0$, <u>atunci</u>, pe lângă concl. T14, avem

1) Soluția $x$ depinde continuu de $c$,

2) ∀ șir nemărginit de puncte $x^1,\dots,x^n\dots$ face ca șirul corespunzător $c^1,\dots,c^n\dots$ să fie nemărginit.

3) există un procedeu analog celui din T20 pentru găsirea marginilor $\gamma_i \le x_i \le \delta_i$, dacă se dau $\alpha_i \le b_i \le \beta_i$.

Un rezultat interesant este și teorema următoare care ne arată importanța faptului că tk-adiacelor saturează <u>sub</u> (pn) sau peste (np) axa reală asupra unor rezultate: „intrare mărginită - ieșire mărginită" (și o dată cu asta, eventual un homeomorfism local)

$\boxed{\text{Teorema 22}}$

1) Dacă $A \in P_0$ şi $\det A \neq 0$ ~~$\forall j = 1, \ldots, n$, $k_j$ e o aplicaţie~~

2) $k_j$ e o aplicaţie continuă $R \xrightarrow{\sim} R$ a.î.

$$\begin{cases} k_j(x_j) = 0 \quad \forall x_j \\ \text{sau} \quad \begin{cases} k_j(x_j) > 0 \text{ pt } \forall x_j > c \\ k_j(x_j) < 0 \text{ pt } \forall x_j < -c \end{cases} \end{cases}$$

pentru un anumit $c > 0$, atunci

$$\underbrace{\|F(x) + Ax\| = \|B\|}_{\text{(ieşirea)}} \to \infty \quad \text{pentru} \quad \underbrace{\|x\| \to \infty}_{\text{(intrarea)}}$$

Variantă: (prin contrapoziţie logică):

intrare mărginită $\Rightarrow$ ieşire mărginită.

$\boxed{\text{Corolar 10}}$ În condiţiile T 22, există o soluţie unică, pentru ecuaţia $F(x) + Ax = B$ şi această soluţie depinde continuu de B. (vezi legătura cu T 5)

În special trebuie subliniat, că în toate teoremele care garantează existenţa şi unicitatea soluţiei, garantează totodată bijectivitatea funcţiilor $\mathcal{F}_1 = F(x) + A$, $\mathcal{F}_1 = AF(x) + Bx$

în cascadă;

$\boxed{\text{Teorema 23}}$ (generală)

Toate teoremele de existenţă şi unicitate a soluţiei lor, dublate de eventuala continuitate a funcţiilor F, vor garanta homeomorfismul global pe şi deci că:

- există o inversă $x = \mathcal{F}^{-1}(c)$ continuă
- intrarea mărginită duce la ieşire mărginită

## 2 Teoreme privind calculul soluţiilor

Şi de data aceasta fac apel la cap 3, par 9 în care aceste teoreme sînt date explicit, împreună cu modul cum trebuie utilizate condiţiile de validitate etc.

Aşa că aici le vom menţiona doar legăturile:

(Teorema 24) ([illegible]) - ~~este F 3 de la pag 152 şi tratează~~ pusă în legea T1. Algoritmul este de tip Newton.

**Teorema 24** Ecuaţia $\boxed{F(x)+Ax=B}$, unde

1) $F \in \tilde{F}^n$
2) A slab dominantă pe linii
3) toate $f_i$ sînt concave sau convexe
4) $a_{ij} \le 0$ pt $i \ne j$, schema de iterare

$$x^{k+1} = [F'(x^k)+A]^{-1}[B - F(x^k) + F'(x^k)x^k]$$

converge la soluţie.

(detalii în T 2p pag 162)

**Teorema 25** (Sandberg) ~~Dacă~~ Ecuaţia $\boxed{F(x)+Ax=B}$ are

1) $F \in \tilde{F}^n$
2) A pare semidefinită
3) $f_i$ au pantele mărginite ~~inferior~~ $\ge \frac{f_i(\alpha)-f_i(\beta)}{\alpha-\beta} \ge \varepsilon$ de la $\varepsilon > 0$

atunci există un alg. convergent la soluţie. (de tip Sandberg) (vezi și la pag 213: T 11)

**Teorema 26** Ecuaţia $\boxed{F(x)+Ax=B}$ cu (legat de T1)

1) $F \in \tilde{F}^n$
2) A slab dominantă pe linii
3) $f_i$ are pantele mărginite inferior: $\frac{f_i(\alpha)-f_i(\beta)}{\alpha-\beta} \ge \varepsilon$

atunci ∃ un alg. convergent la soluţie.

(vezi pag. 159, Teorema 12 pt detalii)

$\boxed{\text{Teorema 27}}$ (vezi legătura cu teoremele: 14, 21)

Ecuația $\boxed{AF(x)+Bx=c}$ ~~...~~ unde

1) $F \in \mathcal{F}^n$

2) $(A,B) \in \mathcal{W}_0$, ~~...~~ admite un algoritm convergent la soluție, bazat pe teorema coborârii gradientului

(detalii T5 de la pag 172)

Desigur prin particularizarea $A = I$ se obține

$\boxed{\text{Corolar 11}}$ Ecuația ~~AF(x)+B~~ $\boxed{F(x)+Ax=B}$ cu

1) $F \in \mathcal{F}^n$

2) $A \in P_0$ admite un alg de calcul convergent la soluție

(detalii pag 175). În fine avem:

$\boxed{\text{Teorema 28}}$ Pentru ecuația ~~AF(x)~~

$\boxed{AF(x)+Bx=c}$ dacă:

1) f nedescrescătoare, continuă: $R \to R$

2) ~~...~~ A = diag. pe coloane și B tare diagonal dominantă pe col.

(~~desigur~~ că atunci algoritmul $\binom{183}{186}$ de la pag 182

(v T6 pag 184 pt detalii)

converge la soluție.

$\boxed{\text{Teorema 29}}$ în condițiile 1, 2 ale teoremei 28, ecuația are o soluție, unică (vezi leg. cu T 17), T 17')

În general, folosind noțiunea de homeomorfism ~~pe~~ se arată că

$\boxed{\text{Teorema 30}}$ (vezi legătura cu T 22) (art. 13)

În condițiile teoremei 27, mai general, dacă R(·) este un homeomorfism global pe, și $R(\cdot) \in C^2$, are loc satisfăcute condițiile teoremei lui Palais. (v cap 3 ~~pag~~), rezultă algoritmi de tip ~~Newton~~, „coborârea gradientului" (v T 27) care converg la soluție, și la fel, algoritmi de tip Newton.