Se observă că :

- dacă Z și C sunt cu elemente suficient de mici, β este indefinită când α este indefinită

Dar aceasta pretinde un h suficient de mic, ceea ce ar putea influența negativ întregul proces (viteza calculului). Teoremele din paragr. precedent, vor depăși acest impas. În anumite condiții ele ne vor asigura că, oricând α are o soluție unică, la fel are și β! (independent de mărimea pasului).

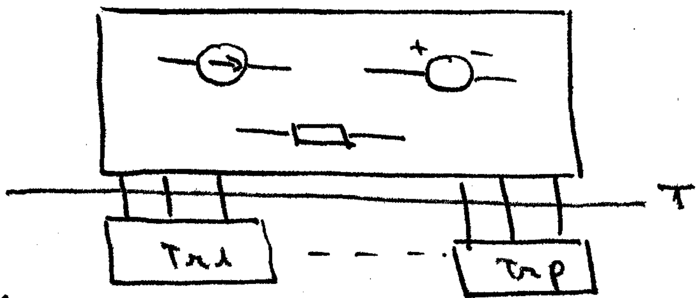
Toate aspectele urmărite la acest punct puteau fi deduse prin simpla particularizare a teoremelor din paragraful următor. Am intrat însă în detalii tocmai pentru a ușura acomodarea cu aceste teoreme și a le sublinia aplicabilitatea.

3 Obținerea ecuației diferențiale în formă normală, pentru un circuit cu tranzistoare

Se pornește de la modelul Gummel al tranzistorului - pag 71 -. Pentru început, să considerăm clasa particulară a circuitelor, formate numai din tranzistoare, elemente liniare și surse independente regulate (Clasa 1)

Această clasă poate apare de exemplu în cazul circui cuitele de comutație, la care frecvența" fiind mare, vor conta numai condensatoarele joncțiunilor. Deci

1. Clasa I (Circ. de comutație)



– fig 10 –
„Clasa I)"

Varianta I

Vom scrie pentru fiecare tranzistor:

$$i_1 = \frac{d}{dt}\left[c_1 v_1 + \tau_1 f_1(v_1)\right] + f_1(v_1) - \alpha_r f_2(v_2)$$
$$i_2 = \frac{d}{dt}\left[c_2 v_2 + \tau_2 f_2(v_2)\right] - \alpha_f f_1(v_1) + f_2(v_2) \qquad (92)$$

sau cu $i = (i_1, \ldots i_{2p})^t$ $\quad v = (v_1, \ldots v_{2p})^t$ (93)

(94)
I.C.C. $\boxed{f_k(v_k) \text{ funcție } \in C^1,\ f_k(0)=0,\ f_k \text{ strict crescătoare}}$

și $F = \left[f_1(v_1) \ldots f_{2p}(v_{2p})\right]^t$ (95'')

$$c_k(v_k) = c_k v_k + \tau_k f_k(v_k) \qquad (95)$$
$$c = \left[c_1(v_1), \ldots c_{2p}(v_{2p})\right]^t \qquad (95')$$

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_p \quad (96) \quad \text{cu} \quad T_k = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r^k \\ -\alpha_f^k & 1 \end{pmatrix} \quad (96')$$

Avem:
$$\boxed{i = \frac{d}{dt}\left[c(v)\right] + T F(v)} \qquad (97)$$
(restricția reactivă) – neliniară

Partea liniară oferă relația:
$$\boxed{i' = G v' - B(t)} \qquad (98)$$

relația oglindă: $\boxed{i' = -i \qquad v' = v}$ (99) Deci:

$$(100) \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left[c(v)\right] + T F(v) + G v = B(t) \qquad t \geq 0}$$

adică forma normală a ecuației difer. a circuitului.

(b) Varianta 2

Dacă luăm în considerație modelul Grammel lărgit (adică prin. rez. de contact) se obține la fel: (v. și cap IV):

$$\boxed{\frac{d}{dt}[C(v)] + TF(v) + (i+GR)^{-1} G C^{-1}(u) = B(t)} \quad (101)$$

unde $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_p$ cu $R_k = \begin{pmatrix} r_a^k + r_b^k & r_b^k \\ r_b^k & r_b^k + r_c^k \end{pmatrix}$ (102)

Putem considera ca aceeași formă (și) generală, dacă punem $\boxed{r_a^k, r_b^k, r_c^k \geq 0}$ (102'), cazul „=" revenind la (100)

Ultima ecuație mai poate fi scrisă:

$$\boxed{\frac{d}{dt}[C(v)] + TF(v) + \hat{G} C^{-1}(u) = B(t)} \quad (103)$$

și avem
$\hat{G} = G$: model simplu
$\hat{G} = (i+GR)^{-1} G$: model lărgit.

(Vezi acum descrierile de la pag 269 privind relația dintre ecuațiile:

(103') $TF(v) + Gv = A$

(104'') $TF(v) + (i+GR)^{-1} G = A_1$

care dau punctele singulare a celor două ecuații)

2. Clasa 2. (generală)

(c) În sfârșit cazul mai general când sunt prezente cond., bobine, diode și tranzistori poate fi rezolvat similar.

Astfel, pentru diodă folosim ipoteza standard (pag 48), de unde:

$$i_d = \frac{d}{dt}\left[C_d v_d + \tau_d I_d(v_d)\right] + I_d(v_d) \qquad (105)$$

[illegible] – presupunem q diode –

Pentru condensatori:

$$\frac{d}{dt}\left[C_{2p+q+k}(v_{2p+q+k})\right] = i_{2p+q+k} \qquad (106)$$

(presupunem r condensatori – care pot fi și neliniari), cu condiția ca $c(0)=0$ și $c : \mathbb{R} \xrightarrow{pe} \mathbb{R}$, $\in C^1$ și e strict crescătoare)

Pentru bobine:

$$\frac{d}{dt}\left[L_{2p+q+r+k}(i_{2p+q+r+k})\right] = v_{2p+q+r+k}, \quad k=1,\dots,s \qquad (107)$$

(presupunem s bobine, de același tip cu condensatorii)

Acum putem scrie relația reactivă:

$$\cancel{\frac{d}{dt}[C(v)]} \qquad (108) \quad \left|\begin{array}{ll} i = \frac{d}{dt}\left[C(v)\right] + TF_1(v) & \text{– pentru primii 2p indici} \\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{C}(v)\right] + \tilde{T}\tilde{F}(v) & \text{– pt. următ. q indici} \\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{C}}(v)\right] + \tilde{\tilde{T}}\tilde{\tilde{F}}(v) & \text{– pt. următ. r indici} \\ v = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{\tilde{C}}}(i)\right] + \tilde{\tilde{\tilde{T}}}\tilde{\tilde{\tilde{F}}}(i) & \text{– pt. următ. s indici} \end{array}\right.$$

Vom renota variabilele:

$$(109) \quad \left|\begin{array}{ll} X_{1,\dots,2p} = i_{1,\dots,2p} & Y_{1,\dots,2p} = v_{1,\dots,2p} \\ X_{2p+1,\dots,2p+q} = i_{2p+1,\dots,2p+q} & Y_{2p+1,\dots,2p+q} = v_{2p+1,\dots,2p+q} \\ X_{2p+q+1,\dots,2p+q+r} = i_{2p+q+1,\dots,2p+q+r} & \text{– – – – – –} \\ X_{2p+q+r+1,\dots,2p+q+r+s} = v_{2p+q+r+1,\dots,2p+q+r+s} & Y = i_{(2p+q+r+1,\dots,2p+q+r+s)} \end{array}\right.$$

și cu aceste notații putem rescrie 108:

$$i_d = \frac{d}{dt}\left[C_d v_d + \tau_d\, f_d(v_d)\right] + f_d(v_d) \qquad (105)$$

  - presupunem q diode -

Pentru condensatori:

$$\frac{d}{dt}\left[C_{2p+q+k}(v_{2p+q+k})\right] = i_{2p+q+k} \qquad (106)$$

(presupunem r condensatori - care pot fi și neliniari), cu condiția ca $c(0)=0$ și $c: \mathbb{R} \xrightarrow{pe} \mathbb{R}$, $\in C^1$ și e strict crescătoare)

Pentru bobine:

$$\frac{d}{dt}\left[L_{2p+q+r+k}(i_{2p+q+r+k})\right] = v_{2p+q+r+k} \qquad (107)$$
$$k = 1, \dots s$$

(presupunem s bobine, de același tip cu condensatorii)

Acum putem scrie ecuația ~~ro~~ reactivă:

$~~\frac{d}{dt}[c(v)]~~$

$$(108)\quad \begin{cases} i_{\cancel{k}} = \frac{d}{dt}\left[C(v_{\cancel{k}}) + TF_1(v_{\cancel{k}})\right] & \text{- pentru primii } 2p \text{ laturi} \\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{C}(v)\right] + \tilde{T}\tilde{F}(v) & \text{- pt. următ. } q \text{ laturi} \\ i = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{C}}(v)\right] + \tilde{\tilde{T}}\tilde{\tilde{F}}(v) & \text{- pt. următ. } r \text{ laturi} \\ v = \frac{d}{dt}\left[\tilde{\tilde{\tilde{C}}}(i)\right] + \tilde{\tilde{\tilde{T}}}\tilde{\tilde{\tilde{F}}}(i) & \text{- pt. următ. } s \text{ laturi} \end{cases}$$

Vom renota variabilele:

$$(109)\quad \begin{cases} X_{1,\dots 2p} = i_{1,\dots 2p} & Y_{1}\dots Y_{2p} = V_{1}\dots V_{2p} \\ X_{2p+1\dots 2p+q} = i_{2p\dots 2p+q} & Y_{2p+1}\dots Y_{2p+q} = V_{1}\dots V_{2p+q} \\ X_{2p+q+1\dots 2p+q+r} = i_{2p+q,\dots 2p+q+r} & \dots\dots \\ X_{2p+q+r+1,\dots 2p+q+r+s} = v_{2p+q+r+1,\dots 2p+q+r+s} & Y = i_{(2p+q+r+1 \dots 2p+q+r+s)} \end{cases}$$

și iată acum notații putem rescrie 108:

$$\boxed{x = \frac{d}{dt}\left[\bar{c}(y)\right] + \bar{T}F(y)} \quad (110)$$ rețea reactivă

unde, ~~x, y~~ x, y au sensul din 109 iar evident

(111)
$$\begin{cases} \bar{c}(y) = c(v) = c_j v_j + z_j t_j v_j & : j = 1 \dots 2p+ \\ \bar{c}(y) = \tilde{c}(v) = c_j v_j' + z_j t_j v_j' & : j = 2p+1 \dots 2p+q. \\ \bar{c}(y) = \tilde{\tilde{c}}(v) = c_j(v_j) & : j = 2p+q+1, \dots 2p+q+r \\ \bar{c}(y) = \tilde{\tilde{\tilde{c}}}(i) = L_j(i_j) & : j = 2p+q+r+1, \dots 2p+q+r+s \end{cases} \quad (111)$$

și ~~$T = T_1 \oplus T_2 \dots \oplus T_p$~~

$$\bar{T} = T_+ \oplus T_a \oplus T_c \oplus T_b \quad (112)$$

(112)
$$\begin{cases} T_+ = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p \\ T_a = i_q \\ ~~T_c = T_b = 0~~ \quad T_c = 0_r \\ \qquad T_b = 0_s \end{cases}$$

(sau $T_c = i_r$, $T_b = i_s$ ca în exemplu anterior, având grijă ca $\tilde{\tilde{F}}, \tilde{\tilde{\tilde{F}}}$ să fie nule)

(113)
$$\begin{cases} \bar{F}(y) = F_j(v_j) = k_j(v_j) & : j = 1 \dots 2p \\ \quad = \tilde{F}(v) = k_j(v_j') & j = 2p+1, \dots 2p+q \quad (113) \\ \quad = \tilde{\tilde{F}}(v) = \text{oarecare (de exemplu 0) pe } j \geq 2p+q \\ \quad \text{(se reduce din } T) \end{cases}$$

Observând că în condițiile cerute, toate funcțiile din (111) admit inversă, există o aplicație diagonală $\bar{c}^{-1}$

ai $\boxed{c(y) = u \Rightarrow y = c^{-1}(u)}$ (114'), deci

(114)
$$\boxed{x = \frac{d}{dt}[u] + \bar{T}\bar{F}(\bar{c}^{-1}(u))} \quad (114)$$ „rețea neliniară - reactivă"

În rețelele unde se vede că prezența bobinelor pare să fie necesară ca parte a părții liniare cu a matrice hibridă H (care variabile x sunt 2p+q+r curenți și s tensiuni). Deci

(115) $\boxed{x' = \bar{H} y' + B}$ (B ∈ surse știilor mărginite și continui ale timp)

(116) Acum, cu destulă atenție la schimbarea anumitor semne din zonele lui H, relația oglindă:

rel. oglindă (116')

$$\begin{cases} x_j = -x'_j & (j = 1 \dots 2p+q+r) \\ x_j = x'_j & (j = 2p+q+r+1, \dots 2p+q+r+s) \\ y_j = y'_j & (j = 1, \dots 2p+q+r) \\ y_j = -y'_j & (j = 2p+q+r+1, \dots 2p+q+r+s) \end{cases}$$

ceea ce face să obținem

$$\boxed{X^* = -\bar{H} y^* + \bar{B}}$$

(117)

(118) $\underline{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & -H_{12} \\ -H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$

$\underline{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{B} = \begin{bmatrix} -B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$

(s-au ilustrat sch. de semn necesare în H și B)

Acum relațiile (114) și (117) dau:

$$\boxed{\frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{T}\bar{F}[\bar{C}^{-1}(\bar{u})] + H\bar{C}^{-1}(\bar{u}) = B} \quad (119)$$

Adică și pentru acest caz foarte general am obținut ecuația diferențială în formă normală. (Desigur, atunci sunt necesare o matrice G, (H), care deci influența buclelor de condensatori)

Dacă nu există G(H) trebuie procedat

– ori se adaugă mici elemente (pe considerente fizice) (v. art [8])

– ori se folosește formalismul lui Bellevitch (V ⊗)

(4) Teoreme privind ecuațiile obținute (reg. nestaționar)

Teorema 1 Ecuația 101 (~~exactă și~~) are o soluție unică, continuă pentru $t \geq 0$, oricare ar fi condițiile inițiale $u(0)=u_0$ și $B(t)$ regulată.

Demonstrație (v. și par. 2)

Calculul Jacobianului duce la

(120) $$J_u^t = T\,\mathrm{diag}\,\frac{k'_i[g_i(u_i)]}{c_i+z_i k'_i[g_i(u_i)]} + G\,\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{c_i+z_i k'_i[g_i(u_i)]}\right\} \quad (120)$$

unde $g_i(u_i)=[c^{-1}(u)]_i$.

și se arată imediat că $\|J_u\|$ e uniform mărginită în R^{2p} superior

Drept urmare:

(121) $$\|TF(c^{-1}(u_a))+Gc^{-1}(u_a)-TFc^{-1}(u_b)-Gc^{-1}(u_b)\| \leq L\|u_a-u_b\| \quad (121)$$

de unde se deduce imediat (cond. Lipschitz e îndeplinită) valabilitatea teoremei 1.

Teorema 2 Dacă ecuația (100) are în plus proprietatea că $(G,T)\in\mathcal{D}^1$ adică ~~sau că~~ $\exists d_1,\dots d_p>0$ a.î.

$$\alpha_t^{(k)} < \frac{d_{2k-1}}{d_{2k}} < \frac{1}{\alpha_r^{(k)}} \quad (122')$$

și ~~dă~~ $D=\mathrm{diag}(d_1\dots d_p)$ e a.î. DG e tare dominantă pe coloane. Atunci din:

(122) $$\begin{cases} \dfrac{du_a}{dt} + TF[c^{-1}(u_a)] + Gc^{-1}(u_a) = B_a(t) & t\geq 0 \\ \dfrac{du_b}{dt} + TF[c^{-1}(u_b)] + Gc^{-1}(u_b) = B_b(t) & t\geq 0 \end{cases} \quad (122)$$

și $B_a, B_b \in \mathcal{B}$ (fct. continue mărginite de timp)

~~atunci dă~~ și $B_a(t)-B_b(t) \to \Theta$ pentru $t\to\infty$, deducem că $[u_a(t)-u_b(t)] \to \Theta$ pe $t\to\infty$.

Corolar 1

În aceleași condiții cu T 2, dacă $(\bar{T}, G) \in D'$ și $\exists$ un B_∞ a.î. $[B(t) - B_\infty] \to \theta$ pt $t \to \infty$, atunci există un u_∞ a.î. $[u(t) - u_\infty] \to \theta$ pt $t \to \infty$, u_∞ este independent de cond. inițiale u_0. $\boxed{\text{Dacă } B_\infty = \theta \to u_\infty = \theta.}$

Teorema 2' Dacă $(\bar{T}, H) \in D'$ și $\bar{u}_a, \bar{u}_b$ sunt soluții ale ecuației (119) sunt valabile aceleași concluzii ca la T2

Corolarul 1' : Analogul lui 1 pentru ecuația 119.

Următoarele două teoreme ~~tratează~~ găsesc o estimare (~~simplă~~ printr-un calcul simplu - algebric + inegalități de verificat) a Timpului de comutare a neuronilor. Astfel, se consideră ~~că~~ îndeplinite condițiile corolarului 1), și se urmărește a se da o majorare și o minorare pentru timpul în care circuitul „comută" din starea lui inițială ~~în~~ în starea u_∞, (pentru B_∞). Desigur că în problemele curente, relațiile ce urmează vor fi folosite, chiar de exemplu ca răspunsul să se apropie până la K% (98% de exemplu) de cel staționar.

Teorema 3 În condițiile corolarului 1, $t \geq 0$

$$(123) \quad \sum_{1}^{2p} d_j \left| u_j(t) - u_{j\infty} \right| \leq \exp(-\underline{K}\, t) \sum_{j=1}^{2p} d_j \left| u_j(0) - u_{\infty j} \right|$$

în ~~care~~ relație, $d_1, \dots, d_{2p}$ există, dacă $\forall$ $G \in D(r)$ (pot fi chiar cele din definiție), iar numărul $\underline{K}$, care se calculează ~~dup~~ după relația (124) va ~~[illegible]~~ putea și ~~nedreaptă~~, pt anumiți d_i având > 0.

(124) $$\boxed{0<\underline{K} = \min_j \min \left\{ \frac{1}{T_j}\left(1-\tilde{d}_j d_j^{-1} \alpha_j\right), \frac{1}{c_j}\left(g_{jj} - \sum_{i \neq j}' d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\}}$$

(124) unde $\tilde{d}_j$ < d_{j+1} pt j impar; d_{j-1} pt j par

- α_j elementul ~~nenul~~ din afara diag. în col j

Teorema 4 Tot în condițiile ~~teoremei~~ Cor 1, există o alegere a ctelor $d_j = 1 \dots 2p$

(125) $$\boxed{\sum_{j=1}^{2p}{}' d_j |u_j(t) - u_{\infty j}| \geq \exp(-\overline{K}t)\sum_{j=1}^{2p} d_j |u_j(0) - u_{\infty j}|} \quad t \geq 0 \qquad (125)$$

unde $$\boxed{\overline{K} = \max_j \max \left\{ \frac{1}{T_j}\left(1+\tilde{d}_j d_j^{-1} \alpha_j\right), \frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{2p} d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right\}} \qquad (125')$$

(cu aceleași explicații de mai sus).

Teorema 5 În condițiile corolarului 1'

(126) $$\boxed{\sum d_j |\overline{u}_j(t) - u_{\infty j}| \leq \exp(-\underline{K}t)\sum' d_j |\overline{u}_j(0) - \overline{u}_{j\infty}|} \quad t \geq 0 \qquad (126)$$

unde $\boxed{0<\underline{K} < \min \{\overrightarrow{K_1}, \overleftarrow{K_2}, \overleftarrow{K_3}\}}$

(127) $$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{K_1}} = \min\limits_{1 \leq j \leq 2p} \min \left\{ \frac{1}{T_j}\left(1-\tilde{d}_j d_j^{-1} \alpha_j\right), \frac{1}{c_j}\left(g_{jj} - \sum_{i \neq j} d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\} \\ \underline{\overleftarrow{K_2}} = \min\limits_{2p+1 \leq j \leq 2p+c} \left\{ \frac{1}{T_j}, \frac{1}{c_j}\left(g_{jj} - \sum_{i \neq j} d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\} \\ \underline{\overleftarrow{K_3}} = \min\limits_{2p+c \leq j \leq 2p+c+r+s} \left\{ \frac{1}{s_j}\left(g_{jj} - \sum_{i \neq j} d_i d_j^{-1} |g_{ij}|\right)\right\} \end{cases} \qquad (127)$$

cu $s_j = \begin{cases} \sup c'_j & \text{pt } j = 2p+q+1, \dots 2p+c+r \\ \sup L'_j & \text{pt } j = 2p+c+r+1 \dots 2p+c+r+s. \end{cases}$

Teoremele care urmează stabilesc câteva din rezultatele care s-au obținut în analiza formulelor de integrare multipunct (diacilii bis pt. 2) (v pag 394)

✗ Se ~~calculează~~ pornește de la ~~formula de integrare~~ calculul Jacob. ecuației (101) de ex: (sau 120 pt. ec 100)

$$(128)\quad J_u = T\,\mathrm{diag}\left\{\frac{f'_j(g_j(u_j))}{c_j + z_j f'_j(g_j(u_j))}\right\} + (i+GR)^{-1} G\,\mathrm{diag}\frac{1}{c_j + f'_j(g(u_j)) z_j}$$

adică o matrice de forma

$$T D_1 + (i+GR)^{-1} G D_2 \qquad (129)$$

~~(la exemplul din pt. 2, T este ... de far~~

(cazul de exemplul de la pt. 2, avem $D_1, D_2 > 0$ ($f_j \neq 0$) și se stabilește rezultatul:

$\boxed{\text{Teorema 6}}$ Dacă ∃ o matrice diag $D > 0$ a.î.

1) DT e stabilă pe col

2) $D\hat{G}$ e stabilă pe coloană
$\left(D(i+GR)^{-1}G\right)$, sau DG - pentru 100)
(101)

atunci ∀ $D_1, D_2 > 0$, Jacobianul ~~din~~ cu expresia (129) are toate zerourile în semiplanul drept strict.

Observații 1) ca o consecință anumite formule de integrare numerică vor fi stabile.

2) In exemplele am utilizat o variantă a T6

Pentru subclasa formulelor de integrare numerică implicită:

$$(130)\quad Y_{n+1} + h b_{-1}\left\{T F\left[c^{-1}(Y_{n+1})\right] + (i+GR)^{-1} G\, c^{-1}(Y_{n+1})\right\} = g_1$$

se face calcule analoage celor de la pag 396.

~~Rezultatul~~ Dintre rezultatele foarte care se stabilesc (menționez că unele sunt mult mai tari) este următoarea

$\boxed{\text{Teorema 7}}$ Dacă $\left| \begin{array}{l} T^{-1} G \in P_0 \text{ pentru } \text{oricare } \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1) \\ \det G \neq 0 \end{array} \right.$

atunci

(131) $\boxed{[T + h b_{-1} T]^{-1} [C + h b_{-1} (i + GR)^{-1} G] \in P_0}$ $\forall h > 0$ (131)

și e consecință, formula 130 e bine definită (la fiecare pas există o soluție unică).

~~Teorema 8~~ (legătura între formulele de integrare și Jacobian):

(se împarte rel. de mai sus (130) cu $h b_{-1}$ ⇒)

$$\Rightarrow \frac{1}{h b_{-1}} y_{n+1} + T F(C^{-1}(y_{n+1}) + \hat{G} C(y^{n+1}) = \xi^{n}$$

(132) $$\boxed{\frac{1}{h b_{-1}} = z} \quad (132)$$

(133) ⇒ Ecuația ~~discretă~~:

$$\boxed{z y_{n+1} + T F[C^{-1}(y_{n+1}) + \hat{G} C(y^{n+1}) = \xi^{n}} \quad (133)$$

a cărui Jacobian Jglobal este

(134) $$\boxed{J_g = z\, i + J_u} \quad (134)$$

Așa că dacă luăm $y_{n+1} = C(u_{n+1})$, teorema de mai sus va apare ca legată liniară de ~~o consecință firească~~ a teoremei lui Palais:

$\boxed{\text{Teorema 8}}$ $$(\sigma z + T)^{-1} (z G + \hat{G}) \in P_0$$

$$\underline{\text{dacă}} \quad \det(\sigma i + J_u) \neq 0 \quad (135)$$

Consecință:

$\det(\sigma i + J_u) \neq 0$, ⇒ ecuația (130) are o soluție unică.

~~Acum~~ Mai mult, se poate impune ca $\det(\sigma i + J_u) \neq 0$ $\forall \sigma > 0$, deci ca J_u să nu aibă valori (proprii)

proprii reale, oricare ar fi $h > 0$ $\left(h < \frac{1}{\sigma b_{-1}}\right)$ (133).

în semiplanul stîng. Deci:

$\boxed{\text{Teorema 9}}$ **Dacă** J nu are valori proprii reale în semiplanul stîng, atunci formula de integrare implicită care întrebuinţează o soluţie unică (la fiecare pas) (am folosit aceeaşi afirmaţie la pctul 2)

Pornind tot de la ✱ concepţia de homeomorfism s-a arătat că:

$\boxed{\text{Teorema 10}}$ Dacă $\det\left(I + h b_{-1} J(y_{n+1})\right) \neq 0$ $\forall y_{n+1}$, atunci există algoritmi convergenţi la soluţia ecuaţiei 130 (de tip Newton de ex).

În sfîrşit pentru cazul formulei particulare:

(136) $Y_{n+1} = y_n + h \hat{Y}_{n+1}$ $\left(a_0 = b_{-1} = 1,\ a_k = b_k = 0,\ k = 1 \dots r\right)$

care duce în mod firesc la:

(137) $\boxed{y_{n+1} + h\{T F[C^{-1}(y_{n+1}) + G C^{-1}(y_{n+1})\} = y_n + h B_n}$

cu $B_n = B[(n+1)h]$ (138)

şi să presupunem că, dacă nu putem face calcule exacte să determinăm un şir y_{n+1} aî (139) $\| D(\hat{y}_n - y_n^*) \|_1 \leq \varepsilon$ $\forall n, 1$ (133)

(140) $\boxed{y_{n+1}^* + h\{T F[C^{-1}(y_{n+1}^*) + G C^{-1}(y_{n+1}^*)\} = \hat{y}_n + h B_n}$ (140)

valoare calculată

Dacă presupunem că la fiecare pas satisfacem rel (139) pt eroarea locală, atunci:

{Eroarea de normă $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ calculată şi în k. anterior

Teorema 11 Există o ctă pozitivă $\delta(c_i, z_i, T, G, D)$ a.î.

$$\|D(y-\hat{y}_n)\|_1 \le (1+\sigma h)^{-n}\|D(y-\hat{y}_0)\|_1 + \varepsilon\sum_{k=0}^{n}(1+\sigma h)^{-k} \quad n \ge 1$$

(unde $\hat{y}_0$ e o aprox. a lui y_0)

De astfel încît DT, DG sînt tari dominante pe col)

Consecință: Dat fiind $\rho > 0$, $\forall h > 0$ putem să alegem un $\varepsilon > 0$ a.î. $\|y_n - \hat{y}_n\|_1 \le \rho$ pentru $n \ge 1$.

(„~~strîngere~~ strîngerea erorilor")

În sfîrșit, teorema ce urmează se ocupă cu relația dintre ecuația difer. originală și cea algebrică adaptată pt calculul numeric. Se arată că

Teorema 12 Dacă, T, D sînt a.î. DT, DG sînt tari dom. pe coloane pentru o anumită matrice diag $D > 0$, $B(t)$ este C^1 în $t: [0,\infty)$ și atît el cît și $\frac{\partial B}{\partial t}$ sînt mărginite pe $[0,\infty)$, $f_i(0)=0$, ~~[illegible]~~ f_i, v_i definite ~~[illegible]~~ adecvat și

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + TF[c^{-1}(u)] + G[c^{-1}(u)] = B(t) & t \ge 0 \\ y_{n+1} + h\{TF[c^{-1}(y_{n+1})] + Gc^{-1}(y_{n+1})\} = y_n + hB[(n+1)h] & n \ge 0 \end{cases}$$

atunci $\exists$ ~~[illegible]~~ $\sigma, \varepsilon > 0$ ~~a.î.~~ independente de h a.î.:

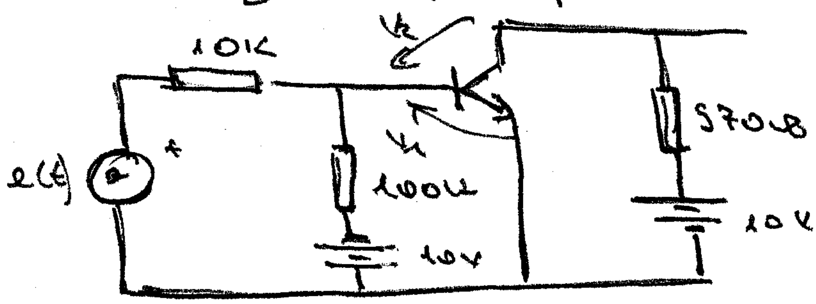
$$\boxed{\|D(u_n - y_n)\| \le (1+\sigma h)^{-n}\|D(u_0 - y_0)\| + \varepsilon h}$$

$\forall n \ge 1$ $\quad (u_n = u(nh))$

~~Aplica~~

(5) Calculul timpului de comutare cu formula 123 / T3

In ~~[...]~~ [art 12] se porneşte de la circuitul:



- fig. 11 -
- circuit practic de inversiune logică.

Unde
$$\begin{cases} \alpha_f = 0.968 \\ C_e = 2\times 10^{-12}\,F \\ \alpha_r = 0.583 \end{cases}$$

$\tau_f = 1{,}7 \cdot 10^{-10}\,s$

$C_C = 1{,}7 \cdot 10^{-12}\,F$

$\tau_r = 2{,}62 \times 10^{-8}\,s$

$$G = \begin{bmatrix} 1{,}1886 \times 10^{-3} & -1{,}01215 \times 10^{-3} \\ -1{,}01215 \times 10^{-3} & 1{,}01215 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

(Unde au fost incluse şi rez. de bază de 280 Ω şi $r_c = 180\,Ω$)

Se presupune circuitul iniţial în starea stabilă

$e(t) = 0.3\,V$ pt $t<0$. Pt $t \geq 0$ $e(t) = 10\,V$ şi pe $t>0$

$u(t) \to u_{...}$ (vector ct).

Relaţia de determinare a lui k, ~~...~~ devine: (124):

$$\underline{k} = \min \left\{ \frac{1}{\tau_f}(1 - d_2/d_1 \alpha_f),\ \frac{1}{C_E}(g_{11} - d_2/d_1 |g_{12}|),\ \frac{1}{\tau_r}(1 - d_1/d_2 \cdot \alpha_r),\ \frac{1}{C_C}(g_{22} - d_1/d_2 |g_{21}|\right\}$$

Sau pentru $d_2 = 1$, $\underline{k}$ e minimum din următoarea serie de 4 numere:

$$\begin{cases} 0.58\,(1 - 0.968 d_1^{-1}) \times 10^{10} \\ 0.5\,(1{,}1886 - 1{,}01210 d_1^{-1}) \times 10^{9} \\ 0.3815\,(1 - 0.583 d_1) \times 10^{8} \\ 0.58\,(1.01215)(1 - d_1) \times 10^{9} \end{cases}$$

Pt $K > 0$ fiind minimul dintre ele, toate termenii să fie pozitivi deci $\boxed{0.968 < \alpha_1 < 1}$ (α)

Căutând minimul maxim al celor 4 expresii varianta cu respectarea condiției (α), găsim valoarea cea mai bună pentru α_1 : 0.9709 (care maximizează minimul global al celor 4 expresii) fiindcă este un calcul f. simplu realizabil fiind de ordin 1.

Pt acest α_1, $K = 1,66 \times 10^7$

Acum, dacă vrem să vedem „timpul de comutare" t_0, să-l definim de exemplu ca aria va- luare cea mai mică t ai $|u_1(t) - u_{\infty 1}| + |u_2(t) - u_{\infty 2}|$ este $\leq 2\% \cdot \{|u_1(0) - u_{\infty 1}| + |u_2(0) - u_{\infty 2}|\}$, pt $t \geq t_0$.

Relația (123) cu K calculat mai sus ne dă $t_0 \approx 241$ ms, o majorare destul de bună (calculul exact dă 57 ms) având în vedere simplitatea cu care este obținută!