C) Aspecte legate de tratarea vectorială

1.) Generalități

Deoarece de la sfârșitul paragrafului precedent a reieșit că nu ne putem continua incursiunea în lumea circuitelor neliniare multiport, fără a face apel la vectori n-dimensionali de forma:

$$(41)\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n)^{tr} \overset{Not}{=} (x_1 \ldots x_n)^{t}$$

și la funcții f, de variabilă vectorială, cu valori vectoriale:

$$(42)\quad f : R^n \longrightarrow R^n, \text{ mai explicit:}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1 \ldots x_n) = y_1 \\ f_2(x_1 \ldots x_n) = y_2 \\ \text{— — — — — —} \\ f_n(x_1 \ldots x_n) = y_n \end{cases}$$

Acest lucru pare a ridica gradul de dificultate al problemei și chiar a teoriei care urmează să apeleze la un întreg complex (definiții, termeni, teoreme, metode) specifice analizei în spațiul R^n. O lectură a unor lucrări îngrijite (v. de ex [1A] cap V, VI din vol I) va elimina însă eventualele neclarități. Mai mult, va apare evident că multe din noile rezultate sunt generalizări firești (uneori chiar triviale) a unor aspecte întâlnite în analiza spațiului unidimensional R, al numerelor reale. Deşi nu vom insista asupra acestor aspecte, consider utilă în acest punct enumerarea (foarte sumară) a acelor chestiuni care vor însoţi calculele lucrării în cadrul lor general, firesc (adică cadrul calculelor în R^n).

② Spaţiul vectorial normat R^n

În primul rând, pe mulţimea R^n, a tuturor vectorilor de forma (41) se introduc operaţiile de adunare, şi înmulţire cu scalari, care îl organizează ca *spaţiu vectorial*, cu proprietăţile de rigoare. Câteva elemente sunt surprinse în relaţiile:

$$x = y \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases} \quad (43) \qquad (x+y) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad (43') \qquad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad (43'')$$

Elementul unitate este:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43''')$$

, şi sunt valabile operaţiile cunoscute.

Apoi, se introduce:

norma : $\| \ \| : R^n \longrightarrow R$, cu proprietăţile

$$\begin{cases} \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = \Theta \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{(ineg. triunghiulară)} \end{cases}$$

Exemple de norme

$$(45)\quad \begin{cases} \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} & \text{(norma euclidiană)} \\ \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_2 = \max\limits_i |x_i| \end{cases}$$

Legat de aceasta se introduce și <u>norma unei matrici</u>, definită prin (v. [2] cap 1 pt. detalii):

dacă există K a.î.:

$$(46)\quad \begin{cases} \|Ax\| \le K \|x\| \quad \forall x \text{, atunci,} \\ \|A\| = \inf K \quad \text{(cea mai mare limită inferioară)} \end{cases}$$

Desigur că pentru diferite norme de vectori vom avea și diferite norme de matrici (v [2] pag 47)

Deasemenea se mai introduce:

<u>distanța</u> $d: R^n \times R^n \to R$ cu proprietățile:

$$(47)\quad \begin{cases} d(x,y) \ge 0 \text{ și } d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \\ d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z) \end{cases}$$

un exemplu $d(x,y) = \|x - y\|$

<u>produsul scalar</u>

$$(48)\quad \begin{cases} \langle\ \rangle : R^n \times R^n \to R : \\ \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = x \cdot y^T \end{cases}$$

introducerea normei în spațiul vectorial normal R^n, deci transformarea lui într-un <u>spațiu vectorial normat</u>

permite definirea noțiunilor specifice analizei. (se definește o <u>topologie</u>, cu noțiuni specifice ca: vecinătate, mulțime deschisă, mulțime închisă, punct de acumulare, frontieră etc).

Se vor introduce deci <u>șirurile</u> în R^n și proprietățile lor. Să remarcăm proprietatea că:

<u>Spațiul R^n este un spațiu complet</u>, adică orice șir Cauchy ($|x_n - x_m| < \varepsilon$, pt $m, n \geq N(\varepsilon)$), este un șir convergent (($|x_n - a| < \varepsilon$ pt $n \geq N(\varepsilon)$ și un anumit a finit). Această proprietate se va dovedi foarte utilă în cazul algoritmilor de calcul bazați pe teorema lui Banach (a punctului fix al contracției)

Exemple de vecinătăți în R^n:

sfera: $\{x \in R^n, \; \|x\| < K\}$ (de rază K, deschisă)

(49)

„paralelipipedul n-dimensional" $\{x \in R^n$ și $x_k \in [a_k, b_k], k = 1 \ldots n\}$ (închis)

<u>3 Funcții vectoriale de variabilă vectorială</u>

Au forma din relația (42)

Desigur că se pune și pentru ele tot setul de probleme clasice:

– <u>injectivitatea</u> ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

<u>surjectivitatea</u> ($\forall y, \exists x$ aî $f(x) = y$)

<u>bijectivitatea</u> = inject. + surj. Să remarcăm că, dacă funcția $f : \underset{(=X)}{R^n} \to \underset{(=Y)}{R^n}$ este bijectivă, atunci există o <u>inversă</u> $f^{-1} : \underset{(=Y)}{R^n} \to \underset{(=X)}{R^n}$, cu proprietatea că $f(f^{-1}(y)) = y$ $f^{-1}(f(x)) = x$.

<u>D</u>: Deasemenea e util să mai facem <u>legătura</u> care există <u>între aceste proprietăți și ecuația</u>:

$$\underline{f(x) = a} \qquad (x, a \in R^n) \qquad (50)$$

Este evident că

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ injectivă} \Rightarrow \text{ecuația are cel mult o soluție} \\ f \text{ surjectivă} \Rightarrow \text{—"— cel puțin o soluție} \\ f \text{ bijectivă} \Rightarrow \text{—"— o soluție, unică} \end{array}\right] \xrightarrow{E} (50')$$

În schimb, reciprocele relațiilor E nu sînt neapărat adevărate (pentru un a e posibil ca ecuația să aibă o soluție fară ca f să fie surjectivă etc)

Reciprocele devin însă adevarate, dacă formularea este <u>oricare ar fi $a \in R^n$</u> $\left\{\begin{array}{l} \text{ecuația are } \overset{\text{max}}{\frown} \text{ o soluție} \\ \text{—"— minim} \\ \text{—"— unică} \end{array}\right.$ $(50'')$

(Am făcut aceste precizari pentru a nu mai fi nevoit să menționez fiecare dată) monotonia – nu are sens în R^n, decît dacă se introduce în mod expres o anumită relație de ordine. Generalizări ale monotoniei duc însă la rezultate utile [art 22], care nu vor fi urmărite aici.

(4) Elemente de analiză în R^n

O dată introduse funcțiile și topologia, se urmăresc aspectele clasice (limite de funcții, continuitate, derivate parțiale a fiecărei componente a lui f față de fiecare variabilă etc)

Ceea ce doresc să menționez în mod expres este rolul jucat de Jacobianul funcției $f : R^n \to R^n$, rol într-un fel analog cu derivata funcției de o variabilă într-un punct. Pentru detalii și reguli de calcul vezi [11] cap V, vol I. Aici voi reda forma sa:

(51) (matricea Jacobiană)

$$\boxed{J_f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_0} ; \quad \boxed{\frac{D(f_1, \dots f_n)}{D(x_1 \dots x_n)} = \det J_f}$$

(Jacobianul)

(51')

$\{x_0 = (x_{10}, \dots x_{n0})^T\}$

~~Determinantul~~
4) Jacobianul f în acest punct este diferit de 0. (v 51)

$$\det J_f = \frac{D(F_1 \dots F_m)}{D(v_1 \dots v_m)}\Big|_c \neq 0. \qquad (55)$$

Concluzii:

a) într-o anumită vecinătate a punctului c, sistemul (53) definește $v_1, \dots v_m$ ca funcții de $u_1, \dots u_n$:

$$(56)\quad \begin{cases} v_1 = f_1(u_1 \dots u_n) \\ v_2 = f_2(u_1 \dots u_n) \\ \text{— — — — —} \\ v_m = f_m(u_1 \dots u_n) \end{cases}$$

b) pentru $u_1 = u_1^0, \dots u_n = u_n^0$ aceste funcții iau respectiv valorile $v_1^0, \dots v_m^0$

c) funcțiile $f_1 \dots f_m$ sînt continue

d) cu derivate parțiale continue în raport cu toate argumentele $(f_i \in C^1)$

Observații

a) teorema stabilește caracterul local al acestei teoreme (astfel tare). Se certifică existența funcțiilor $f_1, \dots f_m$ bine definite doar într-o vecinătate a punctului $c\,(u_1^0, \dots v_m^0)$

Încercările de a „prelungi" funcțiile f_k definite implicit la întreg spațiul s-au dovedit deosebit de dificile. Totuși, în ultimul timp s-au înregistrat câteva rezultate foarte puternice (v pt. 7)

b) Demonstrația teoremei este făcută prin inducție.

Tot prin inducție se stabilește și rezultatul :

$\boxed{\text{Corolar 1}}$ Dacă adăugăm la cerințele teoremei 5

<u>ipoteza suplimentară</u>

5) $F \in C^K$ (adică derivate parțiale continue până la ordinul K inclusiv), atunci avem

<u>concluzia suplimentară</u>

e) f_i din 56, $\in C^K$

---

6 Teorema de inversiune locală

Pentru a obține din teorema 1, teorema de inversiune locală a funcțiilor $f : R^n \to R^n$, de tipul

$$(57) \quad f(x) = y \qquad \text{sau}$$

$$(57') \begin{cases} f_1(x_1, \dots x_n) = y_1 \\ - - - - - - \\ f_n(x_1, \dots x_n) = y_n \end{cases}$$

(aceeași lucru este și cerința ca ecuația $f(x) = y$ să aibă o ~~unică~~ soluție unică - v rel E - (50))

vom face în prealabil unele transformări:

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) - y_1 = 0 = F_1(x_1, \dots x_n, \underline{\underline{y_1}} \dots y_n) \\ f_2(x_1 \dots x_n) - y_2 = 0 = F_2(x_1, \dots x_n, \underline{\underline{y_1}} \dots y_n) \\ - - - - - - - - - - - \\ f_n(x_1, \dots x_n) - y_n = 0 = F_n(x_1, \dots x_n, y_1 \dots \underline{y_n}) \end{cases} \quad (58)$$

Scrisă în forma (58), chiar dacă s-a apărut mai complicată (introducerea dependenței ipotetice inexistente) - pentru să putem aplica direct T 1, cu notațiile

$x_1, \dots x_n$ în loc de $v_1, \dots v_n$

$y_1, \dots y_n$ în loc de $u_1, \dots u_n$. Obținem:

Teorema 2' - teorema inversei locale

- varianta 1 -

Ipoteze:

1) Dacă funcțiile din sistemul (58) sunt definite și continue în paralelipipedul dreptunghic

$$D' = [y_1^0 - \Delta_1, y_1^0 + \Delta_1; \dots y_n^0 - \Delta_n, y_n^0 + \Delta_n; x_1^0 - \Delta_1', x_1^0 + \Delta_1'; \dots x_n^0 - \Delta_n', x_n^0 + \Delta_n']$$

cu centrul în punctul C': $(y_1^0, \dots y_n^0, x_1^0, \dots x_n^0)$

2) Punctul C verifică (58)

3) $F \in C^1$ (pentru toate argumentele) în D'

4) $$(58') \quad \det J = \frac{D(F_1, \dots F_n)}{D(x_1, \dots x_n)} \neq 0 \text{ în punctul } C'.$$

Concluzii

a) Într-o anumită vecinătate a punctului C' sistemul (58) definește $x_1, \dots x_n$ ca funcții de $y_1 \dots y_n$, univoce:

$$(59) \begin{cases} x_1 = f_1'(y_1, \dots y_n) \\ \vdots \\ x_n = f_n'(y_1, \dots y_n) \end{cases}$$

b) Pentru $y_1 = y_1^0, \dots y_n = y_n^0$, aceste funcții iau respectiv valorile $x_1^0, \dots x_n^0$

c) $f_1', \dots f_n' \in C^1$

Observație

Analizînd forma particulară a funcțiilor F din 58, vedem că derivabilitatea față de $y_1, \dots y_n$ este asigurată. În plus Jacobianul din (58') nu va depinde de variabilele y. De aceea condițiile 1–4 pot fi puse direct în termenii funcțiilor inițiale f și se ajunge la forma următoare (standard) a teoremei de inversiune locală

Teorema 2 — teorema de inversiune locală
— varianta standard —

Ipoteze

1) Funcțiile $f_1, \dots f_n$ din (57) sunt definite și continui în paralelipipedul:

$D : [x_1^0 - \Delta_1', x_1^0 + \Delta_1', \dots x_n^0 - \Delta_n', x_n^0 + \Delta_n']$ cu centrul în punctul $C\,[x_1^0, \dots x_n^0]$

2) Punctul $C'\,[x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_n^0]$ verifică ecuația (57)

3) $f \in C^1$

4) $\det J f = \dfrac{D(f_1 \dots f_n)}{D(x_1 \dots x_n)} \neq 0$ în punctul C.
(60)

Concluzii

Aceleași ca la T 2', într-o anumită vecinătate a punctului $C''(y_1^0, \dots y_n^0)$

Ca și la T1 avem corolarul:

Corolar 2 Dacă adăugăm la T 2

ipoteza suplimentară

5) $f \in C^k$, atunci avem

concluzia suplimentară

d) $f^{-1} \in C^k$

Observație

Se remarcă din nou caracterul local al teoremei, care asigură existența a două vecinătăți $U(x_0)$ și $V(y_0)$ a.î. $f|_{U(x_0)} \longrightarrow V(y_0)$ (restricția lui f la aceste vecinătăți) este bijectivă. Ca atare există o inversă $f^{-1} : V(y_0) \to U(x_0)$ (care se referă numai la cele două vecinătăți). – nimeni nu ne asigură că nu mai există un x_0' a.î. $f(x_0') = y_0$ și din nou două vecinătăți $U'(x_0')$, $V'(y_0)$ corespunzătoare.

Este însă clar că interesul nostru ar fi să avem teoreme care să ne asigure posibilitatea inversiunii globale, adică a bijectivității, sau în termenii (50), că $\forall y$, ecuația $f(x) = y$ are o soluție, unică.

De aceea s-a lucrat un însemnat efort pentru a obține astfel de rezultate.

(7) Teoreme de inversiune globală

a) Introducere

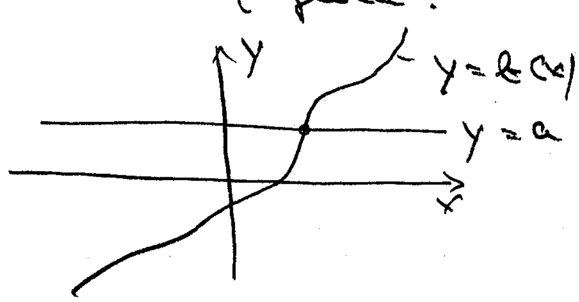
În paragraful anterior am anticipat necesitatea găsirii unor metode care să ne asigure de posibilitatea inversării globale a unei funcții $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

O primă metodă ar fi să putem constata injectivitatea și surjectivitatea lui f. De exemplu, funcția:

$$f = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 1 \\ \lg_2(x_1+x_2) \end{pmatrix} \text{ are } f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

și ca atare nu este injectivă.

În general însă va fi extrem de dificil să stabilim pentru o problemă concretă dacă f este injectivă și mai ales surjectivă. Să remarcăm că, pentru cazul unidimensional, chiar dacă ecuația ilustrată în figură:



– fig 2.1 –

nu poate fi rezolvată exact, putem răspunde ușor la întrebări calitative cum ar fi: existența sau unicitatea soluției (surjectivitate – respectiv injectivitate)

Pe cazul neliniar n-dimensional însă, acest lucru este dificil (nu mai avem de exemplu nici o imagine grafică)

De aceea, o teoremă care, pornind doar de la scrierea ecuației $f(x) = y$ să ne asigure existența unei soluții unice (inverse globale) ar fi deosebit de puternică și de utilă.

Lucrările apărute în ultimul timp [art 1-23] pornesc tocmai de la astfel de teoreme, pe care le vom vedea fără demonstrație (v. [0])

Pentru început avem nevoie de câteva definiții, care ne vor simplifica enunțurile ulterioare. Pentru ca aceste definiții să apară mai firești vom încerca să facem mai transparente căile pe care se poate ajunge la ele.

Anticipând rezultate din cap $\underline{IV}$, $\underline{V}$, pornim de la observația că, pentru obținerea formei normale a ecuațiilor diferențiale ce caracterizează un circuit în regim nestaționar vor trebui inversate anumite funcții, pentru a face ca unele variabile (de ex. variabile rezistive) să fie scoase din anumite relații implicite, funcție de cele de stare (de ex tensiunea pe condensatori). Deci din relații de forma

$$f(i_R, v_G, i_L, v_C) = \alpha \quad (61) \implies \begin{cases} i_R = f_i^{-1}(i_L, v_C) \\ v_G = f_i^{-1}(i_L, v_C) \end{cases} \text{(de ex).}$$

Aceste funcții vor fi introduse în ecuația diferențială a circuitului care va căpăta forma:

(62) $\quad \dot{X} = F(x, t) \qquad x$ – vector de stare

În acest moment, pentru a putea aplica o teoremă privind existența (unicitatea etc) soluțiilor ecuațiilor diferențiale (62) va fi în general necesar ca funcția F și o dată cu ea funcțiile care o compun să satisfacă anumite condiții (continuitate, Lipschitz, apartenență la C^k etc). Printre funcțiile care intervin în F apar însă și f_k^{-1} și de aici se vede că ar fi util, atunci când rezolvăm ecuații de forma (61) să putem spune mai multe despre soluțiile lor – continuitate, derivabilitate etc.

La aceasta voi mai adăuga că, teoremele de inversiune locală care sunt folosite intensiv pentru obținerea celor de inversiune globală, au și ele ca ipoteză, și oferă ca concluzii anumite proprietăți ale funcțiilor f și f^{-1} (continuitate etc). Sper ca aceasta să fac mai livrești următoarele definiții:

(b) Definiții

Definiția 1 Se numește homeomorfism global (pe) o funcție $f: R^n \to R^n$ cu proprietățile:

1) f continuă

2) f bijectivă $\to$ există o inversă globală f^{-1}

3) f^{-1} e continuă

Definiția 2 Se numește homeomorfism local (în) o funcție $f: R^n \to R^n$ cu proprietățile:

1) f e continuă (de fapt rezultă din 2)

2) $\forall x_0$, dacă $f(x_0) = y_0$, atunci există două vecinătăți deschise $U_{(x_0)}, V_{(y_0)}$ ai $f\big|_{U_{x_0}} \longrightarrow V_{y_0}$ este un „homeomorfism pe"

Definiția 3: Se numește difeomorfism de ordin K global („K-difeomorfism pe"), o funcție care, pe lângă propr. 1) 2) 3) de la D1 are și:

4) atât f cât și $f^{-1} \in C^K$

Definiție 4: Se numește difeomorfism de ordin K local („K difeomorfism în") o funcție care pe lângă proprietatea de la D3, mai asigură pentru restricția $f\big|_{U_{x_0}}$, cât și pentru $f^{-1}\big|_{V(y_0)} \to U_{x_0}$ apartenența la C^K.

Aplicație

În cazul liniar, dacă în teorema 2 de inversiune asigurăm îndeplinirea tuturor condițiilor (inclusiv $\det J f \neq 0$) pentru toate punctele lui R^n, atunci paralelipipedul D devine R^n iar teorema duce la:

$\boxed{\text{Teorema 3}}$ (teorema homeomorfismului local)

Ipoteză: În relația $f(x) = y$, funcția f satisface

1) $f_i \in C^1 \quad \forall x \in R^n$

2) $\det J = \frac{D(f_1 \ldots f_n)}{D(x_1 \ldots x_n)} \neq 0 \quad \forall x \in R^n$

Concluzie

Funcția f este un homeomorfism local, mai mult, un „difeomorfism local"

~~Deci~~ Din Corolarul 2 se obține

$\boxed{\text{Teorema 4}}$ Dacă pe lângă 1) 2) în T3 avem ipoteză suplimentară

3) $f \in C^K \quad \forall x \in R^n$

Concluzie

f este un difeomorfism de ordin K (local) (K difeomorfism local).

Observații

1) Aceste teoreme dau condiții suficiente, nu necesare pentru ca f să fie hom. local.

2) În acești termeni (D 1-4) matematicienii au obținut teoremele de inversiune globală date în continuare. Fără a lor justificări detaliile făcute în acest paragraf.

(C) Teoreme de inversiune globală

Să remarcăm de la început că, în limbajul adoptat, dacă vom demonstra că o funcție e un homeomorfism global, aceasta va asigura bijectivitatea și, deci:

- că ecuația $f(x) = a$ are o soluție unică
- funcția $f(x) = y$ are o inversă $f^{-1}(x)$ care este în același timp continuă.

Dacă arătăm, în plus că f e un „K difeomorfism pe" deducem automat că $f^{-1} \in C^K$

În sfârșit, dacă o teoremă (v. T 5) ne va asigura că $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un hom. pe o submulțime a mulțimii de sosire adică

$$\underset{\substack{(=X)\\ \text{(domeniu)}}}{f : \mathbb{R}^n} \to \underset{\substack{(=Y)\text{ (deschisă)}\\ \text{(codomeniu)}}}{f(\mathbb{R}^n) =}$$

| vom deduce injectivitatea lui f, sau că ecuația $f(x) = a$ are cel mult o soluție.

Teorema cu care încep e utilă în situații foarte diverse și e cunoscută sub numele de „teorema de invarianța a domeniului" (T. lui Brouwer)

Teorema 5 — t. lui Brouwer de invar. a domeniului

Ipoteze : A e o mulțime deschisă și $f: A \to R^n$ este injectivă și continuă

Concluzie : $f(A)$ e deschisă și f este un homeomorfism (pe $f(A)$)

Teorema 6 (t. fundamentală a hom. global)

Dacă $f: R^n \to R^n$, atunci, dacă

1) f e un homeomorfism local

2) $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$

atunci f e un homeomorfism global și reciproc

Observații :

1) Concluzia rămîne valabilă și dacă ipoteza 2) este schimbată cu 2'), a cărei 2' (mai jos) este echivalentă cu 2

2') imaginea inversă prin f a unei mulțimi mărginite este mărginită.

Corolar 6 $2 \Leftrightarrow 2'$

2) Dacă în genere, în cazurile concrete condiția 1 e ușor de verificat (v. de ex T4), condiția 2) ridică serioase dificultăți.

Teorema 7 (t lui Palais) (reiese din T5 și T6)

Dacă o funcție $f: R^n \to R^n$ are proprietățile

1) $f \in C^1 \quad \forall x \in R^n$

2) $\det J f \neq 0 \quad \forall x \in R^n$

3) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$ sau 3') imag. inversă a unei mult. mărginite e mărginită

<u>atunci</u> f e un homeomorfism global pe R^n

<u>Observaţii</u>

1) Condiţiile teoremei sunt suficiente, nu şi necesare pentru a asigura hom. global, aşa cum se poate şi vedea în anumite exemple în care, deşi condiţiile ei nu sunt respectate ($\det J f \neq 0$), reuşim găsi o funcţie inversă continuă prin calcule directe.

2) Teorema este puternică. Pe baza ei pot fi obţinute multe din teoremele din cap IV ca simple particularizări! (demonstrarea lor directă necesită un considerabil efort – v [0], dar are avantajul unei mai bune înţelegeri a situaţiei concrete).

3) Ca un proces al T 3 şi T 4 obţinem şi:

$\boxed{\text{Teorema B}}$ (Palais) <u>Dacă</u> $f : R^n \to R^n$ satisface

1) $f \in C^k \quad \forall x \in R^n$

2) $\det J f \neq 0 \quad \forall x \in R^n$

3) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$

<u>atunci</u> f e un C^k-difeomorfism pe "

4) Condiţia 3 e dificil de verificat. De aceea tocmai utilă se poate dovedi teorema!

Teorema 9 (de lanț)

Dacă $f \in C^1$ și formăm din $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

determinanții din primele k linii și k coloane pe care îi notăm cu J_k (minori principali). Atunci, dacă există o constantă $\varepsilon > 0$ aî

$$(63)\quad |\det J_1| \geq \varepsilon, \left|\frac{\det J_2}{\det J_1}\right| \geq \varepsilon, \ldots \left|\frac{\det J_n}{\det J_{n-1}}\right| \geq \varepsilon \qquad (L)$$

cu condiția de înlănțuire

uniform în x $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$

Atunci f e un homeomorfism global pe $\mathbb{R}^n$

(d) Concluzii

Aceste rezultate, ca și altele de aceeași factură (v. art [20, 21, 22]), permit ca să putem răspunde la întrebări privind ecuația:

$$f(x) = a$$

sau la problema inversării funcției:

$$f(x) = y$$

prin simpla inspectare a verificării condițiilor din ipotezele lor.

În acest sens, să reținem că T 6, 7, 8, 9 asigură implicit bijectivitatea, iar T 5 injectivitatea, că verificarea T 9 va face ca homeomorfismul global să fie dovedit, și prin aceasta, contam reciproci teoremei 6; $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$, ceea ce va fi demonstrat interesant din punctul de vedere „imagine mărginită - inversă mărginită". În acest sens vezi și ref(50) cu discuția aferentă.

Să mai observăm că, atunci când aceste teoreme se vor putea aplica, obținem automat informații asupra lui f^{-1} (continuitate, C^k), care s-ar putea fi foarte utile (v. discuția de la pag 92).