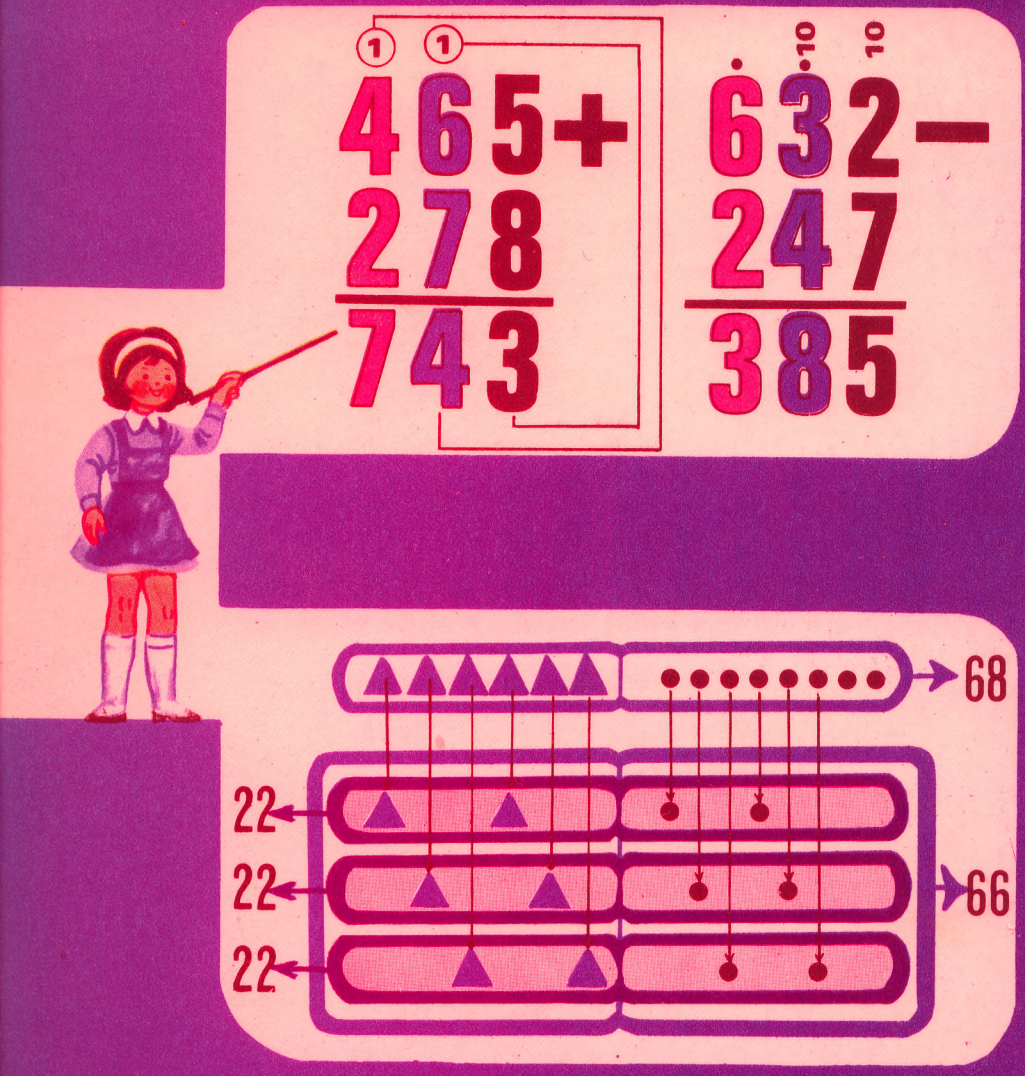


DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a III-a

ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

Prof. DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a III-a
ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI

Referenți :

Prof. PETRUȚA GĂZDARU
Prof. GHEORGHE I. HERNESCU
Prof. ION MITRACHE
Prof. ZOE MURGOCI

Redactor : TUDORA GAVRILĂ
Tehnoredactor : VELCOVICI CONSTANTINA
Coperta : DUMITRU ȘMALENIC

Capitolul I

RECAPITULAREA ŞI COMPLETAREA CUNOŞTINŢELOR DIN CLASA A II-a

A. SCURTE OBSERVAŢII ASUPRA CONŢINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

1. Noţiuni despre mulţimi.

2. Principiul numirii şi scrierii numerelor mai mari ca 10, a celor mai mari ca 100.

3. Adunarea şi scăderea numerelor pînă la 100, fără şi cu trecere peste ordin.

4. Adunarea şi scăderea numerelor naturale pînă la 1 000, fără trecere peste ordin.

5. Înmulţirea şi împărţirea numerelor naturale pînă la 100, insistîndu-se asupra sensului dat cu ajutorul mulţimilor şi a cunoaşterii tablei înmulţirii şi împărţirii.

2. CUNOŞTINŢE ŞI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

1°. *Noţiunile de mulţime* şi *element*, împrospătate pe bază de exemple. *Apartenenţa* şi *neapartenenţa* unui element la o mulţime.

2°. *Diagrama unei mulţimi.* Reprezentarea mulţimii printr-o linie închisă şi a elementelor acesteia prin puncte figurate în interiorul ei. Notarea simbolică în diagramă a mulţimii printr-o literă mare scrisă lîngă linia închisă şi a elementelor ei prin litere mici scrise lîngă punctele ce reprezintă acele elemente.

3°. *Scrierea mulţimii folosind simbolurile,* sub forma

$$A = \{b, c, d, \ldots, m, p\}$$

Apartenenţa[1] sau neapartenenţa unui element la o mulţime se scrie:

$b \in A$ (b aparţine lui A)

$l \notin A$ (l nu aparţine lui A)

[1] Textul scris cu „petit" conţine informaţii pentru învăţător, conţinutul respectiv nu se transmite elevilor.

Observarea faptului că pentru cunoașterea mulțimii, ordinea în care se iau elementele nu are importanță, iar indicarea aceluiași element de mai multe ori nu are rost. În consecință, în scrierea simbolică a mulțimii, ordinea scrierii simbolurilor elementelor va putea fi oricare dorim, iar repetarea unui simbol va fi inutilă.

4°. Se va reaminti că *o mulțime poate fi dată indicîndu-se toate elementele ei* (prin lista elementelor), sau poate fi dată indicîndu-se *o proprietate caracteristică elementelor sale*, adică o proprietate pe care o are orice element al mulțimii, și numai ele. Se vor da exemple de mulțimi prin fiecare din aceste procedee.

5°. *Situația în care se poate afla o mulțime A față de o mulțime B :* fără elemente comune, sau disjuncte ; cu unele elemente comune (fiecare avînd și elemente necomune cu cealaltă) ; una inclusă în cealaltă, numindu-se și submulțime sau parte a acesteia ; egale (formate exact din aceleași elemente).

Dacă fiecare element al lui A aparține și lui B, zicem că A este inclusă în B și notăm $A \subset B$. Dacă B este inclusă în A se notează $B \subset A$, sau $A \supset B$ (A include B). Dacă A este egală cu B se notează $A = B$. Dacă A nu coincide cu B se notează $A \neq B$ (A diferită de B).

Se va reaminti executarea diagramei mulțimilor A și B dacă ele se află în oricare din situațiile menționate mai sus, folosind figura 1. Pentru diagrama a două mulțimi disjuncte se va folosi și figura 2, iar pentru o mulțime inclusă într-o mulțime se va folosi și figura 3.

6°. Utilizînd elementele a două mulțimi date A și B se va cunoaște formarea unor mulțimi noi, numite :

Intersecția mulțimii A cu mulțimea B, formată din toate elementele ce aparțin atît lui A cît și lui B, (și numai din acestea).

Se notează : $A \cap B$.

Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B, formată din toate elementele ce aparțin lui A și nu aparțin lui B (și numai din acestea).

Se notează : $A - B$.

Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A, formată din toate elementele ce aparțin lui B și nu aparțin lui A (și numai din acestea).

Se notează : $B - A$.

Reuniunea mulțimii A cu mulțimea B, formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile A și B (și numai din acestea).

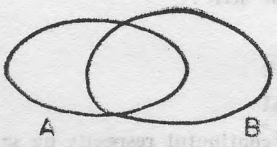


Fig. 1.

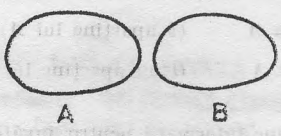


Fig. 2.

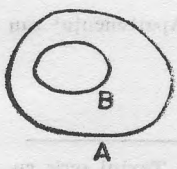


Fig. 3.

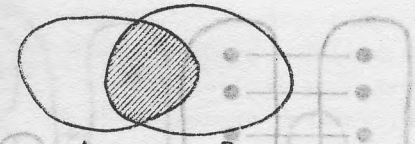


Fig. 4.

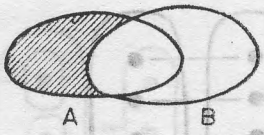


Fig. 5.

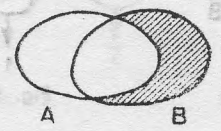


Fig. 6.

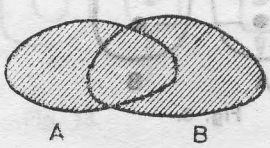


Fig. 7.

Se notează : $A \cup B$.

Intersecția, diferențele și reuniunea dintre mulțimea A și mulțimea B vor fi formate atunci cînd se cunosc elementele mulțimilor A și B, și vor fi recunoscute în cazul în care mulțimile A și B sînt date prin diagramele lor (figurile 4, 5, 6 și 7).

7°. Se va reaminti că putem vorbi de *mulțimea pereche* (cu două elemente), *mulțimea cu un singur element* și *mulțimea vidă* (fără nici un element).

Mulțimea vidă se notează cu $\varnothing$, scriind : $\varnothing = \{\}$.

Se observă că A și B fiind mulțimi disjuncte, putem scrie $A \cap B = \varnothing$ (sau $A \cap B = \{\}$)

8°. Pe bază de exemple va fi pusă în evidență proprietatea de *comutativitate* a intersecției și reuniunii mulțimilor și *necomutativitatea* diferenței mulțimilor.

Se notează :

$$A \cap B = B \cap A; \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A - B \neq B - A$$

Tot pe bază de exemple se va observa proprietatea de *asociativitate* a reuniunii mai multor mulțimi.

Se notează :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

ceea ce justifică scrierea :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

9°. Se va reaminti că, dacă între mulțimile A și B există o astfel de legătură încît fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B și fiecare element din B corespunde la un singur element din A, atunci între A și B spunem că avem o *corespondență element cu element sau „unu la unu"* (fig. 8).

În cazul în care între mulțimile A și B se poate stabili o corespondență unu la unu zicem că ele au *tot atîtea elemente*, sau că *au același număr de elemente*.

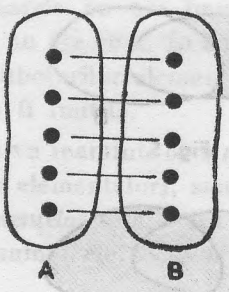


Fig. 8.

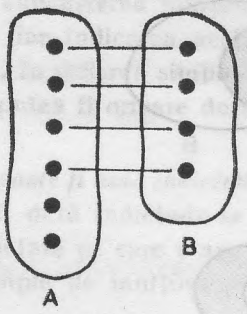


Fig. 9.



Fig. 10.

Se notează :

$A \sim B$ (se mai spune că A și B sînt echipotente).

Dacă între mulțimile A și B nu se poate stabili o corespondență unu la unu (fig. 9) zicem că ele *nu au tot atîtea elemente*, sau că *nu au același număr de elemente.*

Se notează : $A \nsim B$ (A neechipotentă cu B).

10°. Dacă, încercînd să stabilim o corespondență, element cu element între o mulțime A și o mulțime B, rămîn în A elemente fără corespondent în B, zicem că *mulțimea A are mai multe elemente decît mulțimea B, sau că mulțimea B are mai puține elemente decît mulțimea A.*

Se notează :

$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ (numărul elementelor mulțimii A este mai mare decît numărul elementelor mulțimii B),

sau :

$\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$ (numărul elementelor mulțimii B este mai mic decît numărul elementelor mulțimii A).

Dacă avem $A \sim B$ atunci putem scrie $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

11°. Numărul de elemente al unei mulțimi cu un singur element îl numim „unu" și îl notăm 1 (fig. 10).

Reunind o mulțime cu un element, cu o mulțime cu un element disjunctă de prima, obținem o mulțime al cărei număr de elemente diferă de unu. Numim „doi" numărul elementelor mulțimii obținute și îl notăm 2 (fig. 11). Avem (fig. 12) :

$$1 < 2.$$

Reunind o mulțime cu două elemente cu o mulțime cu un element disjunctă de prima, obținem o mulțime al cărei număr de elemente diferă de doi. Numim „trei" numărul elementelor mulțimii obținute și îl notăm 3 (fig. 13). Avem (fig. 14) :

$$1 < 2 < 3.$$

Continuînd astfel putem obține mulțimea numerelor naturale nenule :

$$N^* = \{1; 2; 3; 4, \ldots\}.$$

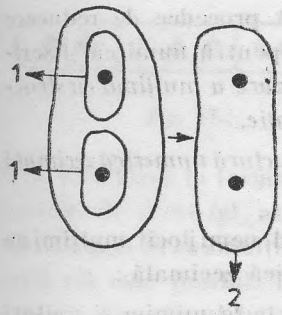


Fig. 11.

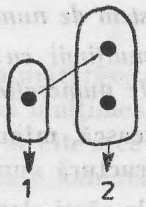


Fig. 12.

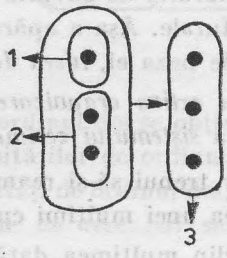


Fig. 13.

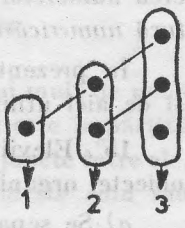


Fig. 14.

12°. Numim zero și notăm 0 numărul elementelor mulțimii vide. Întrucît orice mulțime nevidă are elemente ce nu au corespondent în mulțimea vidă, decurge că este firesc pe zero să-l considerăm mai mic decît orice număr natural.

Putem scrie acum *mulțimea numerelor naturale:*

$$N = \{0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ldots\}.$$

Se vede că în această mulțime nu există un număr mai mare decît toate celelalte, deoarece oricît de mare ar fi numărul de elemente al unei mulțimi, reunind această mulțime cu o mulțime cu un element, disjunctă de prima, obținem o mulțime al cărei număr de elemente este mai mare decît cel al mulțimii considerate anterior.

13°. Pentru numirea fiecărui număr natural de la zero la nouă s-a folosit cîte o denumire specială, iar pentru scrierea lui cîte un semn special, numit *cifră*. Elevii trebuie să sesizeze că *cifra nu este același lucru cu numărul pe care aceasta îl reprezintă*, tot așa cum numele unei persoane, scris pe o foaie de hîrtie, nu este același lucru cu persoana însăși. Cifra nu este decît un simbol grafic ce reprezintă numărul. *Numărul rămîne distinct de simbolul său.*

Totuși, în situațiile în care anumite semne sînt folosite exclusiv pentru scrierea numerelor, aceste semne își pierd orice altă importanță. Privind de exemplu semnul 3, noi nu ne gîndim la nimic în legătură cu acest semn (nici la mărime, nici la formă etc.), ci doar la numărul pe care îl reprezintă. De aceea, în mod obișnuit, semnele cu care sînt scrise numerele nu sînt privite ca fiind distincte de numerele înseși. Spunem, de exemplu, că 3 este un număr și nu 3 reprezintă un număr (deși sensul corect este acesta din urmă).

14°. Acordarea de nume și semne noi pentru fiecare număr natural, așa cum s-a făcut pînă la nouă, ar fi un lucru posibil dar foarte nepractic, chiar dacă ne-am limita la numere relativ mici.

Pentru numerele pînă la 100 000, insuficiente pentru nevoile practice elementare, am avea nevoie de 100 000 denumiri și de tot atîtea semne. Aceasta ne-ar supune memoria la eforturi chinuitoare, făcînd inaccesibilă cunoașterea numerelor naturale pentru imensa majoritate a oamenilor, fără a mai vorbi de dificultatea găsirii unui număr atît de mare de cuvinte și semne distincte, cîte unul pentru fiecare număr natural.

Pentru a soluționa rezonabil problema s-au căutat procedee de reducere la minimum a numărului de cuvinte și semne folosite pentru numirea și scrierea numerelor naturale. Așa a apărut *ideea de organizare a mulțimii cu structură numerică* și, pe baza ei, *ideea de sistem de numerație.*

În prezent *s-a extins organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală* și de aici utilizarea *sistemului zecimal de numerație.*

15°. Elevii vor trebui să-și reamintească, mînuind nemijlocit mulțimi de obiecte, organizarea unei mulțimi cu structură numerică zecimală :

a) Se separă din mulțimea dată, ale cărei elemente le numim și unități simple sau unități de ordinul întîi, submulțimi de cîte zece elemente, disjuncte două cîte două, atît cît este posibil. Fiecare submulțime de zece unități simple o numim „*zece*" sau *unitate de ordinul doi.*

b) Formăm mulțimea avînd ca elemente toate unitățile de ordinul doi, și mulțimea avînd ca elemente toate unitățile de ordinul întîi cu care nu s-a mai putut completa o unitate de ordinul doi (numărul acestora este cel mult egal cu 9).

Dacă avem cel mult 9 unități de ordinul doi, organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală este terminată. Presupunînd, de exemplu, că s-au obținut 3 unități de ordinul doi și au rămas 4 unități de ordinul întîi, putem reprezenta structura numerică zecimală a mulțimii cu ajutorul *figurii numerice* alăturate (fig. 15), pe care elevii vor trebui să o realizeze și cu piesele din trusa pentru studiul numerelor naturale.

16°. *Structura numerică zecimală a mulțimii și figura numerică care o reprezintă sugerează numirea și scrierea numerelor într-un sistem numit sistem zecimal de numerație :*

a) Denumirea numărului de elemente al mulțimii se obține spunînd cîte unități de fiecare ordin se găsesc în structura numerică zecimală, în ordine descrescătoare, spunînd și numele ordinului respectiv, în afară de unitățile simple la care se spune cîte sînt, dar nu se spune numele ordinului.

În exemplul de mai sus : treizeci și patru.

b) Scrierea numărului este sugerată de figura 16. Se scriu cifrele ce reprezintă cîte unități de fiecare ordin sînt în structura numerică zecimală a mulțimii, în ordinea descrescătoare a unităților. Se obține o scriere poziționlă, în care cifrele reprezintă unități de un anumit ordin, conform locului pe care îl ocupă în scrierea numărului, numerotarea ordinelor făcîndu-se de la dreapta la stînga.

În exemplul nostru : 34.



Fig. 15.

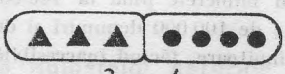


Fig. 16.

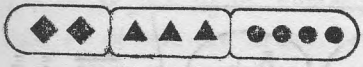


Fig. 17.

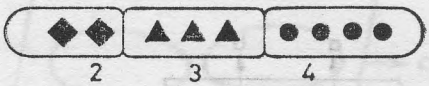


Fig. 18.

17°. Dacă la formarea unităților de ordinul doi se obțin mai mult de nouă unități de acest fel, atunci mulțimea unităților de ordinul doi este împărțită la rîndul ei în submulțimi de cîte zece unități de ordinul doi, disjuncte între ele, atît cît este posibil. Fiecare submulțime de *zece zeci* se numește *sută* sau *unitate de ordinul trei*.

Se formează : mulțimea unităților de ordinul trei ; mulțimea unităților de ordinul doi, cu care nu s-a mai putut forma o unitate de ordinul trei ; mulțimea unităților de ordinul întîi cu care nu s-a mai putut forma o unitate de ordinul doi.

Dacă s-au obținut astfel 2 unități de ordinul trei, 3 unități de ordinul doi și 4 unități de ordinul întîi, structura numerică zecimală a mulțimii este reprezentată de figura numerică alăturată (fig. 17), care completată așa cum arată figura 18 sugerează pentru număr denumirea „două sute treizeci și patru" și scrierea 234.

Dacă nu avem în structura numerică zecimală unități de un anumit ordin, numărul lor îl notăm cu 0. Astfel, pentru structurile numerice reprezentate în figurile 19 și 20, numerele de elemente le vom nota 201, respectiv 340.

Se va reaminti elevilor *utilizarea trusei pentru studiul numerelor naturale în scopul reprezentării structurii numerice zecimale a mulțimilor cu mai puțin decît o mie de elemente.* Elevii vor fi puși în situația de a mînui singuri piesele trusei pentru : realizarea reprezentării structurii zecimale a unei mulțimi ; numirea și scrierea numărului de elemente al unei mulțimi a cărei structură numerică zecimală este realizată de învățător cu ajutorul pieselor din trusă.

18°. Pentru *a aduna două numere naturale a și b :*

a) se ia o mulțime A cu a elemente și o mulțime B cu b elemente, astfel încît mulțimile A și B să fie disjuncte ;

Prescurtat : $\overline{\overline{A} = a}$; $\overline{\overline{B} = b}$; $A \cap B = \varnothing$

b) se formează reuniunea mulțimilor A și B ;

c) se numără cîte elemente are reuniunea lui A cu B. Dacă c este numărul elementelor acestei reuniuni, scriem (fig. 21) :

$$a + b = c$$

sau sau fig. 21*) :

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}$$

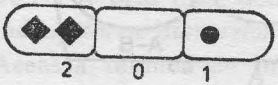


Fig. 19.



Fig. 20.

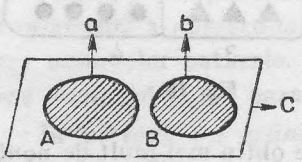


Fig. 21.

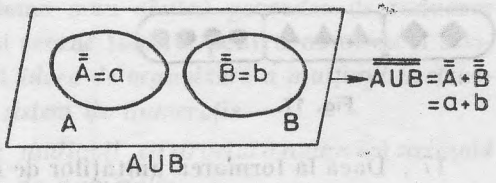


Fig. 21*.

Numerele a şi b se numesc *termenii adunării*, c se numeşte *sumă* sau *total*. Mulţimile A şi B pe care le-am folosit le numim *mulţimi model pentru termenii adunării*. Reuniunea lor constituie *mulţimea model pentru sumă*.

19°. Pentru *a scădea din numărul natural a, numărul natural b*:

a) se ia o mulţime A cu a elemente. Din A separăm o submulţime B cu b elemente;

Prescurtat: $\bar{\bar{A}} = a$; $\bar{\bar{B}} = b$; $B \subset A$

b) se formează mulţimea diferenţă dintre mulţimile A şi B;

c) se numără cîte elemente are mulţimea diferenţă astfel formată. Dacă c este numărul ei de elemente, scriem (fig. 22):

$$a - b = c$$

sau (fig. 22*):

$$\bar{\bar{A}} - \bar{\bar{B}} = \overline{\overline{A - B}} \qquad \text{(fig. 22*)}$$

Numerele a şi b se numesc *termenii scăderii*, a se numeşte descăzut, b scăzător iar c *diferenţă* sau *rest*.

Mulţimile A şi B pe care le-am folosit se numesc mulţimi model pentru descăzut, respectiv pentru scăzător. Mulţimea diferenţă dintre mulţimile A şi B pe care am obţinut-o se numeşte mulţime model pentru diferenţa sau restul dintre numerele naturale a şi b.

20°. Observăm că drept mulţimi model pentru a face adunarea sau scăderea numerelor naturale putem folosi orice mulţimi care îndeplinesc condiţiile cerute de regulile de adunare sau scădere.

Este avantajos pentru găsirea unor *reguli comode de efectuare a operaţiilor cu numerele naturale să folosim structurile numerice ale mulţimilor model, re-*

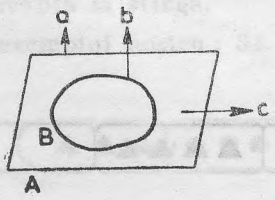


Fig. 22.

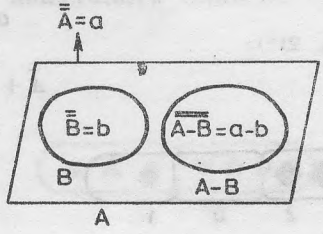


Fig. 22*.

prezentate prin figuri numerice, materializate cu piesele din trusa pentru studiul operațiilor cu numere naturale.

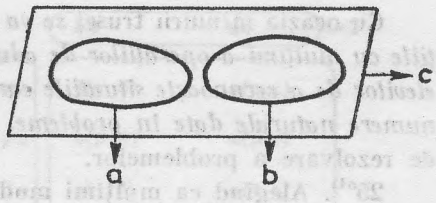


Fig. 23.

Folosind figuri ca 23 se va reaminti că avem simultan :

$$a + b = c \qquad c - a = b$$
$$b + a = c \qquad c - b = a$$

ceea ce conduce la *proba adunării prin adunare și prin scădere* și *proba scăderii prin scădere și prin adunare :*

$$a + b = c \text{ proba prin } \begin{cases} \text{adunare :} & b + a = c \\ \text{scădere :} & \begin{cases} c - a = b \\ c - b = a \end{cases} \end{cases}$$

$$a - b = c \text{ proba prin } \begin{cases} \text{scădere :} & a - c = b \\ \text{adunare :} & \begin{cases} c + b = a \\ b + c = a \end{cases} \end{cases}$$

22°. Cu ocazia deducerii probelor menționate se va pune în evidență că *putem afla un termen al operației de adunare sau scădere, cînd se cunoaște rezultatul și celălalt termen.*

În cazul adunării, scăzînd din sumă unul din termeni se obține celălalt termen :

$$\begin{cases} a + x = c \\ x = c - a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + b = c \\ x = c - b \end{cases}$$

În cazul scăderii, scăzînd din descăzut diferența, obținem scăzătorul :

$$\begin{cases} a - x = c \\ x = a - c \end{cases}$$

și adunînd la diferență scăzătorul, obținem descăzutul

$$\begin{cases} x - b = c \\ x = c + b \end{cases}$$

23°. Pentru efectuarea adunărilor și scăderilor, în mulțimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, se va reaminti *deducerea regulilor de calcul în cazurile fără sau cu trecere peste ordin, cu ajutorul trusei pentru studiul numerelor naturale.* Prin mijlocirea trusei se va deduce modul în care se gîndește efectuarea operației, care va fi ilustrat apoi în scris prin folosirea parantezelor. *Asupra acestui mod de scriere nu se va insista decît în măsura în care favorizează însușirea unor deprinderi de calcul oral.*

24°. Tot prin intermediul trusei se vor deduce *regulile de calcul în scris, folosind așezarea numerelor unele sub altele.*

Această tehnică de lucru trebuie foarte bine reamintită, reactualizînd și întărind deprinderile de calcul la elevi.

Cu ocazia mînuirii trusei *se va folosi cu grijă limbajul mulțimilor și definițiile cu mulțimi a operațiilor de adunare și scădere, ceea ce va mări capacitatea elevilor de a recunoaște situațiile care cer operația de adunare sau scădere a unor numere naturale date în probleme,* sporind apreciabil capacitatea elevilor de rezolvare a problemelor.

25°[1]. Alegînd ca mulțimi model, mulțimi de litere, se vor reaminti noțiunile de *cuplu* sau *pereche ordonată* și *mulțimea produs* (cartezian) *a două mulțimi date.*

Dacă luăm mulțimile

$$A = \{c,\ d)\}\ ;\ B = \{m,\ p,\ t\}$$

produsul lor cartezian este mulțimea formată din toate cuplurile ce pot fi formate astfel încît primul element al cuplului să fie din A și al doilea din B :

$$A \times B = \{(c,\ m),\ (c,\ p),\ (c,\ t)\ (d,\ m),\ (d,\ p),\ (d,\ t)\}.$$

Mulțimea $A \times B$ va fi scrisă și sub forma din figura 24, care prezintă avantajul de a pregăti utilizarea trusei pentru studiul numerelor naturale în scopul efectuării înmulțirii numerelor naturale, pe baza mulțimii produs.

26°. *Pentru a înmulți două numere naturale a și b :*

a) se ia o mulțime oarecare A cu a elemente și o mulțime oarecare B cu b elemente ;

b) se formează mulțimea produs $A \times B$;

c) se numără elementele (cuplurile) mulțimii produs. Dacă se găsesc c cupluri, scriem :

$$a \times b = c \text{ sau } a \cdot b = c$$

sau

$$A = a\ ;\quad B = b\ ;\quad a \cdot b = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$$

Numerele a și b se numesc *factorii înmulțirii*, iar rezultatul c se numește *produs.*

27°. Mulțimile model A și B folosite pentru factori pot fi oarecare, numai să respecte condițiile cerute în definiție. Din exemple se va observa că *modificarea mulțimilor A și B alese ca modele pentru factori duce la modificarea*

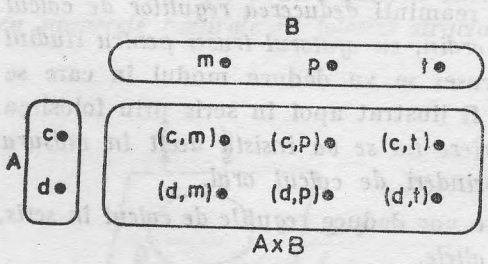


Fig. 24.

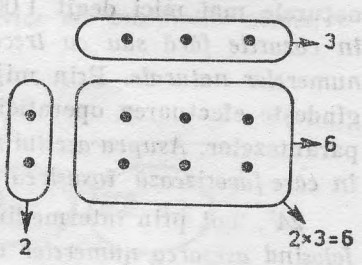


Fig. 25.

Punctele 25°—29° facultative.

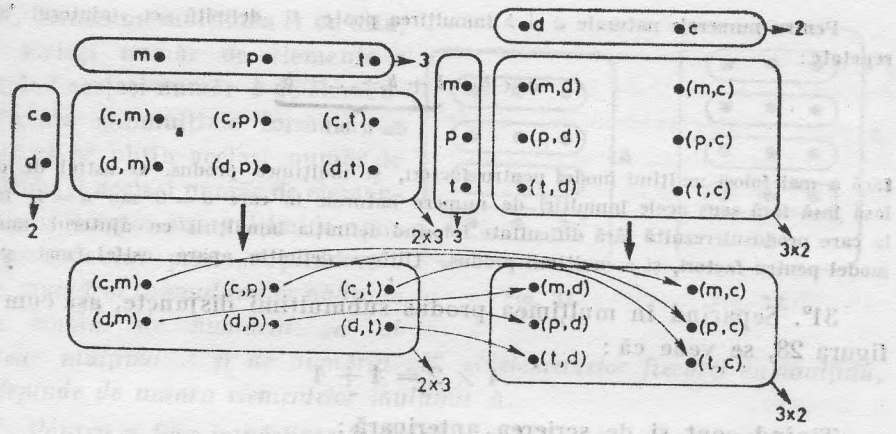


Fig. 26.

mulțimii produs care se obține, aceasta înlocuindu-se cu alta ce are același număr de elemente cu ea. Așadar, *prin această modificare, numărul produs al numerelor a și b rămîne neschimbat.*

Observațiile anterioare ilustrează că produsul numerelor naturale *a* și *b*, efectuat după regula de mai sus, depinde numai de numerele factori *a* și *b* și nu depinde de natura elementelor mulțimilor model pentru factori, nici a elementelor mulțimii produs.

28°. Se va efectua înmulțirea numerelor naturale folosind figuri ca 25, care ilustrează că $2 \times 3 = 6$.

29°. Se va reaminti *comutativitatea înmulțirii*, din observarea unor figuri ca 26, care ne dă :

$$2 \times 3 = 3 \times 2.$$

În cazul în care un factor este 0, comutativitatea se constată calculînd produsele $0 \times p$ și $p \times 0$ și găsind $0 \times p = p \times 0$.

30°. Separînd în mulțimea produs submulțimi disjuncte între ele, așa cum arată figura 27, deducem *posibilitatea de scriere și efectuare a înmulțirii numerelor naturale cu ajutorul adunării repetate :*

$$4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2,$$

primul factor spunînd de cîte ori trebuie scris al doilea ca termen al adunării.

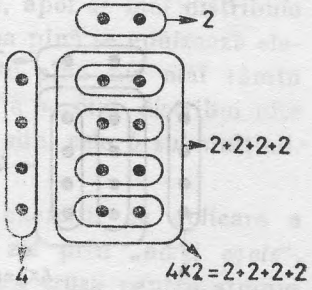


Fig. 27.

Observăm că dacă primul factor este 0 sau 1 înmulțirea nu poate fi scrisă cu ajutorul adunării repetate după procedeul de mai sus.

În adevăr, cum am putea scrie folosind adunarea repetată a lui 8, înmulțirile $0 \times 8 =$ sau $1 \times 8 =$

Pentru numerele naturale a și b înmulțirea poate fi definită cu ajutorul adunării repetate:

$$a \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{de } a \text{ ori}}$$

fără a mai folosi mulțimi model pentru factori, și mulțimea produs. O astfel de definiție lasă însă fără sens acele înmulțiri de numere naturale la care $a = 0$ sau $a = 1$, înmulțiri la care produsul rezultă fără dificultate folosind definiția înmulțirii cu ajutorul mulțimilor model pentru factori, și a mulțimii produs. Ultima definiție apare astfel mai generală.

31°. Separînd în mulțimea produs submulțimi disjuncte, așa cum arată figura 28, se vede că:

$$4 \times 2 = 4 + 4$$

Ținînd cont și de scrierea anterioară:

$$4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2$$

rezultă următoarea regulă (pentru cazurile cînd înmulțirea poate fi scrisă ca adunare repetată):

Pentru efectuarea înmulțirii a două numere naturale scriem pe unul din factori ca termen al adunării, de cîte ori arată celălalt factor.

Întrucît vom folosi obișnuit scrierea înmulțirii ca adunare repetată, așa cum s-a arătat la (30°), situațiile redate în figurile 29 și 30 conduc la scrierile:

$$2 \times 4 = 4 + 4; \qquad 4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2$$

32°. Tabla înmulțirii va fi recapitulată cu răbdare, pînă la formarea unor automatisme trainice în găsirea rezultatelor.

33°. Pentru *a separa o mulțime A în submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd b elemente*, se iau pe rînd din A cîte b elemente, pînă epuizăm cele a elemente ale mulțimii A. *Procedeul* folosit se numește prin „*cuprindere*". În final, fie că nu rămîn elemente în afara submulțimilor formate, fie că rămîn prea puține pentru a mai forma o nouă submulțime (fig. 31 și 32).

Se vor face exerciții de aplicare a acestui procedeu folosind piesele din trusa pentru studiul numerelor naturale.

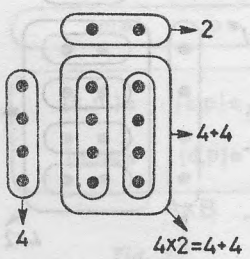


Fig. 28.

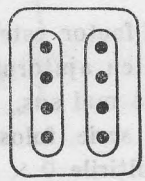


Fig. 29.

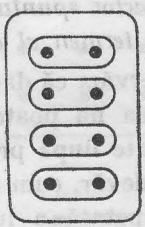


Fig. 30.

34°. Înlocuind mulțimea A cu alta, avînd același număr de elemente a și păstrînd același număr b de elemente în fiecare submulțime formată, se constată că se obțin același număr de submulțimi și același număr de elemente în afara acestor submulțimi la aplicarea procedeului prin „cuprindere". Așadar, *numărul submulțimilor obținute depinde numai de numărul „a" al elementelor mulțimii A și de numărul „b" al elementelor fiecărei submulțimi, și nu depinde de natura elementelor mulțimii A.*

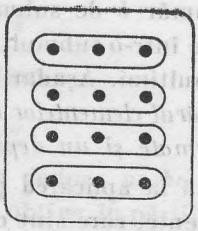


Fig. 31.

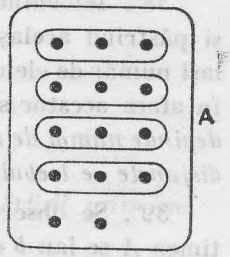


Fig. 32.

35°. Pentru a *face împărțirea (exactă) a numărului natural a la numărul natural b :*

a) se ia o mulțime oarecare A cu a elemente ;

b) se separă A în submulțimi disjuncte două cîte două, avînd fiecare cîte b elemente, atît cît este posibil ;

c) dacă nu rămîn elemente în afara acestor submulțimi, se numără cîte submulțimi s-au obținut. Dacă s-au obținut c submulțimi, se scrie :

$$a : b = c.$$

Dacă au rămas elemente cu care nu s-a mai putut forma o nouă submulțime, se zice că *împărțirea (exactă) a lui a la b este imposibilă.*

Numărul natural a se numește *deîmpărțit*, b se numește *împărțitor* și c se numește *cît*. a și b *împreună se numesc termenii împărțirii.*

Împărțirea efectuată prin procedeul de mai sus zicem că a fost făcută prin cuprindere.

36°. Observînd aspectul obținut pe panoul trusei la efectuarea împărțirii $a : b = c$, se observă că avem $c \times b = a$, adică *înmulțind cîtul cu împărțitorul obținem deîmpărțitul.* În acest mod putem face *proba împărțirii prin înmulțire.* În figura 31 avem : $12 : 3 = 4$ și $4 \cdot 3 = 12$.

37°. *Pentru a separa o mulțime A în b submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd același număr de elemente,* se iau pe rînd elementele lui A și se distribuie cîte unul în fiecare din cele b submulțimi, apoi se mai distribuie cîte un element din A în cele b submulțimi, și tot așa pînă se epuizează elementele lui A, sau pînă nu mai rămîn suficiente pentru a se mai distribui cîte unul în fiecare din cele b submulțimi. (fig. 33 și 34).

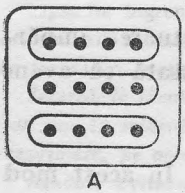


Fig. 33.

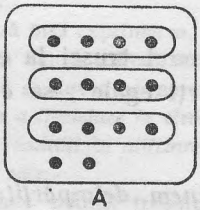


Fig. 34.

Se vor face exerciții de aplicare a acestui *procedeu* zis prin *„părți egale"*, folosind piesele din trusa pentru studiul numerelor naturale.

38°. Înlocuind mulțimea A cu alta avînd același număr de elemente a, și păstrînd același număr b de submulțimi, se constată că se obține același număr de elemente într-o submulțime și rămîne același număr de elemente în afara acestor submulțimi. Așadar, *numărul elementelor dintr-o submulțime depinde numai de numărul elementelor mulțimii A și de numărul de submulțimi disjuncte ce trebuie formate și nu depinde de natura elementelor mulțimii A.*

39°. Se observă că la aplicarea procedeului prin „părți egale", din mulțimea A se iau b elemente, care sînt distribuite cîte unul în fiecare din cele b submulțimi disjuncte, apoi se iau din A iarăși b elemente care se distribuie cîte unul în fiecare din cele b submulțimi disjuncte etc. Așadar, *se vor obține în fiecare submulțime atîtea elemente, de cîte ori se pot lua din A cîte b elemente.*

Conchidem că *numărul de elemente care revin într-o submulțime la aplicarea procedeului prin „părți egale" coincide cu numărul de submulțimi ce se obține la aplicarea procedeului* prin „cuprindere" (a se compara figurile 31 și 33). Aceasta permite efectuarea împărțirii numărului natural a la numărul natural b, prin procedeul zis prin „părți egale".

40°. *Pentru a face împărțirea (exactă) a numărului natural a la numărul natural b:*

a) se ia o mulțime oarecare A cu a elemente ;

b) se distribuie din A cîte un element în fiecare din cele b submulțimi disjuncte cîte două, apoi se mai distribuie din A cîte un element în fiecare din cele b submulțimi disjuncte cîte două, și așa mai departe pînă se epuizează elementele lui A, sau pînă nu mai rămîn suficiente pentru a se mai distribui cîte un element în fiecare din cele b submulțimi ce trebuie formate ;

c) dacă nu au mai rămas elemente în A cu care să nu putem completa încă cîte un element în fiecare din cele b submulțimi disjuncte, numărăm cîte elemente s-au obținut într-o submulțime.

Găsind c elemente, scriem :

$$a : b = c.$$

(Dacă ar fi rămas elemente necuprinse în cele b submulțimi, împărțirea era imposibilă).

Din cele arătate la punctul (39) se vede că *la împărțirea numerelor naturale se obține același cît indiferent dacă se folosește procedeul prin „cuprindere", sau cel prin „părți egale".*

41°. Observînd aspectul obținut pe panoul trusei la efectuarea împărțirii $a : b = c$, folosind procedeul prin „părți egale", se constată că avem

$$b \times c = a$$

adică *înmulțind împărțitorul cu cîtul obținem deîmpărțitul.* În acest mod sîntem conduși la *proba împărțirii prin înmulțire.*

42°. Elevii vor trebui să observe că din figura 31 putem deduce

$$12 : 3 = 4$$

efectuată prin cuprindere și în același timp

$$12 : 4 = 3$$

efectuată prin părți egale. De aici se va deduce *proba împărțirii prin împărțire:* împărțind deîmpărțitul la cît se obține împărțitorul.

43°. Sintetizînd rezultatele de mai sus, se va constata că *următoarele* scrieri sînt toate deodată adevărate:

$$3 \times 4 = 12; \quad 4 \times 3 = 12; \quad 12 : 3 = 4; \quad 12 : 4 = 3.$$

Pe această bază se va aminti *cum putem scrie rezultatul unor împărțiri, folosindu-ne de cunoașterea rezultatului unor înmulțiri, și cum poate fi întocmită tabla împărțirii, cunoscînd tabla înmulțirii.*

Se va acorda toată atenția împrospătării, pînă la automatisme, a tablei împărțirii.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL I

(Număr de ore, orientativ = 15)

1°. Cunoștințele menționate mai sus, sînt în marea lor majoritate cunoscute de elevi din clasa I sau a II-a. Ele vor fi împrospătate cu ocazia discuțiilor purtate în legătură cu rezolvarea exercițiilor și problemelor propuse în manual la acest capitol, și cu altele asemănătoare pe care le va propune învățătorul.

Se va insista pentru înțelegerea cunoștințelor pe bază de exemple, manifestîndu-se însă grijă și pentru exprimarea corectă a ideilor de către elevi (fără a cădea în verbalism, neacoperit noțional).

Pentru a se evita exagerările și utilizarea mecanică a unor simboluri s-a preferat să nu se folosească încă unele notații consacrate, cum ar fi:

$$p \in A; \; p \notin A; \; A \cup B; \; A \cap B; \; A - B; \; A \sim B; \; \overline{A}; \text{ etc.}$$

Lipsa lor îngreunează însă exprimarea, mai ales în scris. Ba, uneori, favorizează apariția unor confuzii tocmai din cauza dificultăților de exprimare, care îndeamnă la „inventarea" unor formulări proprii ce se dovedesc nereușite.

Încercările făcute de a introduce la elevi un minimum de notații de felul celor de mai sus nu au pus în evidență dificultăți în utilizarea lor, elevii resimțind cu satisfacție ușurarea realizată în exprimare, pe această cale.

Așadar, evitarea unor notații trebuie privită doar ca o măsură de prudență și *nu ca o interdicție.*

2°. O atenție deosebită trebuie acordată *distincției dintre mulțime și numărul ei de elemente.* Să luăm de exemplu problema (fig. 35) :

„Reuniunea C a mulțimilor disjuncte A și B are 9 elemente. Dacă mulțimea A are 4 elemente, cîte elemente are mulțimea B ?"

Greșește, sau nu, cineva care ar interpreta astfel problema : „Cunoaștem reuniunea C a lui A cu B, și mulțimea A, și trebuie să aflăm mulțimea B" ?

Desigur că greșește. În primul rînd, nu se cunoaște nici mulțimea C nici mulțimea A, întrucît elementele lor ne sînt necunoscute (și nici nu pot fi aflate folosind textul problemei). Ceea ce cunoaștem este numărul elementelor lui C, care este 9, și numărul elementelor lui A, care este 4.

În al doilea rînd, nu ni se cere să aflăm mulțimea B, ceea ce nici nu ar fi fost posibil a afla din datele problemei, ci doar numărul elementelor mulțimii B, notat în figură cu x.

Făcînd operația $9 - 4 = 5$ nu aflăm mulțimea B, această mulțime nu este $B = \{5\}$ (caz în care B ar avea un singur element, pe 5). Făcînd operația $9 - 4 = 5$ aflăm numărul x al elementelor lui B, $x = 5$. Dar fiecare din cele 5 elemente ale lui B ne rămîne cu desăvîrșire necunoscut, deci și mulțimea B rămîne necunoscută.

Simbolic, problema s-ar scrie prescurtat :

$$A \cap B = \varnothing ; \quad \overline{\overline{A \cup B}} = 9 ; \quad \overline{\overline{A}} = 4 ; \quad \overline{\overline{B}} = ?$$

iar soluția ei :

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}} - \overline{\overline{A}}, \quad \text{adică} \quad \overline{\overline{B}} = 9 - 4 ; \quad \overline{\overline{B}} = 5,$$

cîștigînd și în conciziune și în rigoare.

3°. Să ne mai ocupăm de o problemă :

„Mulțimea A are 3 elemente necomune cu mulțimea B, mulțimea B are 5 elemente necomune cu mulțimea A, iar intersecția lui A cu B are 2 elemente. Cîte elemente are fiecare din mulțimile A și B ? Dar reuniunea lor ?"

În clasa a II-a, pentru rezolvarea problemei, s-au folosit figuri ca 36. Uitîndu-se uneori faptul că în diagrama unei mulțimi elementele sînt reprezentate prin puncte și nu prin litere sau cifre, numerele 3, 2 și 5 din figură au putut fi luate ca fiind elemente ale mulțimilor și nu ca reprezentînd numerele elementelor unor mulțimi.

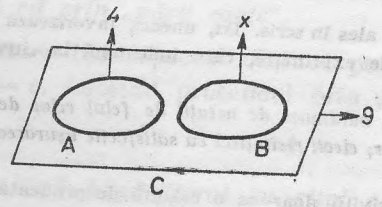


Fig. 35.

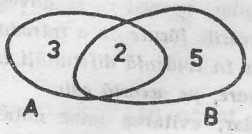


Fig. 36.

În adevăr, există riscul ca din figura 36 să se deducă:

$$A - B = \{3\},\quad A \cap B = \{2\},\quad B - A = \{5\}$$

: nu

$$\overline{\overline{A - B}} = 3;\quad \overline{\overline{A \cap B}} = 2,\quad \overline{\overline{B - A}} = 5$$

cum s-a dorit atunci cînd s-a făcut figura respectivă.

În această interpretare, mulțimea A ar avea 2 elemente (pe 3 și 2), mulțimea B ar avea 2 elemente (pe 2 și 5) iar reuniunea lor ar avea 3 elemente (pe 3, 2 și 5), alternativă care nu s-a avut în vedere în textul problemei.

În conformitate cu textul problemei A are $3 + 2$ elemente, B are $2 + 5$ elemente iar reuniunea lor are $3 + 2 + 5$ elemente.

Figura 36, în cazul problemei noastre, putea fi înlocuită cu alta în care *să fie reprezentate prin puncte toate elementele mulțimilor care intervin.* Dacă în locul numerelor 3, 2 și 5 am fi avut, respectiv, 254, 69 și 328 atunci *era nepractic a figura un număr atît de mare de puncte* și utilizarea unei figuri ca 36 prezintă avantaje evidente.

Cu același sens ca figura 36 ar putea fi folosite figuri ca 37, dacă se consideră mai mic riscul de confuzii.

4°. Trebuie atrasă atenția elevilor că, dacă numărul elementelor mulțimii A este 9 și numărul elementelor mulțimii B este 5, putem scrie $9 > 5$, dar *notația $A > B$ este fără sens, fără sens fiind și expresia „mulțimea A este mai mare (sau mai mică) decît mulțimea B“.* Putem spune însă că: „numărul elementelor mulțimii A este mai mare (sau mai mic) decît numărul elementelor mulțimii B“.

Ultima afirmație se scrie:

$$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}},\quad \text{respectiv}\quad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}.$$

5°. Adunarea numerelor naturale 9 și 5 se scrie $9 + 5 =$, în scopul efectuării fiind necesară alegerea mulțimilor disjuncte A și B, respectiv cu 9 și 5 elemente, formarea reuniunii lui A cu B și numărarea ei.

Scrierea $A + B$ este fără sens, semnul $+$ avînd sens doar între numere și nu între mulțimi (semnul reuniunii mulțimilor este $\cup$).

6°. Scăderea numerelor naturale 9 și 5 se scrie $9 - 5 =$, în scopul efectuării fiind necesară alegerea unei mulțimi A cu 9 elemente și separarea în ea a unei submulțimi B cu 5 elemente, urmînd a număra elementele mulțimii diferență obținută.

Scrierea $A - B$ reprezintă mulțimea diferență dintre mulțimea A și mulțimea B (indiferent dacă B este, sau nu, inclusă în A), *și nu diferența numărului lor de elemente. Confuzia* dintre mulțimea diferență $A - B$, și numărul diferență dintre numărul elementelor lui A și numărul elementelor lui B *este favorizată atît de coincidența folosirii termenului „diferență“, cît și a semnului „$-$“, în ambele cazuri* (deși sensul este diferit).

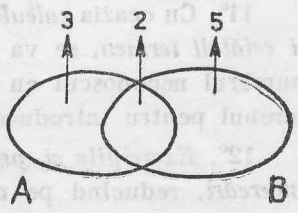


Fig. 37.

Mulțimea diferență a mulțimilor A și B se notează $A - B$, iar numărul diferență dintre $\overline{\overline{A}}$, numărul elementelor lui A și $\overline{\overline{B}}$, numărul elementelor lui B, avînd $B \subset A$, se scrie $\overline{\overline{A - B}}$.

7°. *Figurile numerice* (vezi fig. 15) *sînt o reprezentare simbolică a mulțimilor organizate cu structuri numerice.* Ele nu trebuie confundate cu mulțimea însăși (chiar dacă au fost realizate obiectual pe panourile trusei pentru studiul numerelor naturale). Aceste figuri numerice pot fi însă utilizate în locul mulțimilor pe care le reprezintă în orice situație în care prezența efectivă a înseși elementelor mulțimii nu este obligatorie (așa cum în multe situații nu este necesară prezența unui anumit obiect, ci este suficientă semnalizarea sa prin simbolul său).

8°. În contextul utilizării figurilor numerice realizate cu piesele trusei, *triunghiul albastru va fi privit ca o unitate de ordinul al doilea, reprezentînd zece unități simple* (sau zece elemente ale mulțimii) ; *patratul roșu va fi privit ca o unitate de ordinul al treilea, reprezentînd zece unități de ordinul al doilea* (se poate deci înlocui cu zece triunghiuri albastre) *sau o sută de unități de ordinul întîi* (adică o sută de elemente ale mulțimii).

9°. *Utilizarea figurilor numerice se justifică prin aceea că evidențiind structura numerică a mulțimii, oferă posibilitatea folosirii comode, intuitive, a acestei structuri, în scopul denumirii și scrierii numerelor, a comparării lor, a deducerii unor reguli practice de calcul.* Mai ales în cazul adunării și scăderii cu trecere peste ordin *figurile numerice concretizează procesele de gîndire care au loc, în mod foarte sugestiv.*

Utilizarea figurilor numerice la deducerea regulilor de adunare și scădere a numerelor naturale a dus la realizarea unor diagrame explicative care aproape nu au nevoie de explicații în cuvinte, reprezentînd adevărate *grafuri logice ale desfășurării proceselor de gîndire în situațiile respective.*

Cu descifrarea acestor grafuri elevii se obișnuiesc repede, putîndu-le „citi" aproape independent, chiar în cazul prezentării unor situații noi, necunoscute încă.

10°. *Împrospătarea* cunoștințelor și deprinderilor elevilor referitoare la structurile numerice zecimale ale mulțimilor și reprezentarea lor prin figuri numerice, cît și la deducerea cu ajutorul lor a regulilor de adunare și scădere, *este necesară în scopul creării bazei pe care se vor introduce numerele mai mari ca 1 000 și operațiile cu ele.*

11°. Cu ocazia *calculării unui termen al operației, cînd se cunoaște rezultatul și celălalt termen,* se va face o bună fixare a *probelor operațiilor* și, notînd numărul necunoscut cu o literă, *se vor rezolva ecuații simple,* pregătindu-se terenul pentru introducerea viitoare a algebrei.

12°. *Exercițiile și problemele cu inegalități vor fi rezolvate exclusiv prin încercări,* reducînd pe cît posibil numărul încercărilor prin observarea și valorificarea datelor problemei. Răspunsurile se vor formula, de regulă,

folosind mulțimile, aceasta oferind un mijloc concis și elegant de prezentare a soluției.

13°. În toate situațiile în care este posibil și firesc, *se va cere exprimarea în limbajul mulțimilor*. Aceasta nu pentru a fi „la modă", ci pentru că *majoritatea problemelor, la acest nivel de învățămînt, decurg din situații practice de viață. În astfel de situații se mînuiesc obiecte concrete, deci se fac în esență diverse operații cu mulțimi de obiecte.* **Rezolvarea numerică a problemei revine, în fond, la a găsi operațiile cu numere care corespund operațiilor cu mulțimi descrise în textul problemei.** *Deprinderea de a găsi operațiile cu numere care duc la rezolvarea problemei se formează în condiții evident superioare dacă elevul este obișnuit să desprindă esența operațiilor cu numere, din noțiunile corespunzătoare privind mulțimile.* Aceasta revine, în fond, la a merge de la concret la abstract.

Trebuie, desigur, avută în vedere și importanța pe care o au anumite noțiuni noi referitoare la mulțimi și corespondențe, pentru prezentarea ulterioară a unor cunoștințe matematice. *Toate acestea pledează în favoarea acordării unei deosebite atenții din partea învățătorului, aprofundării cunoștințelor pe baza noțiunilor noi prevăzute de programă.*

14°. Atragem atenția asupra grijei cu care trebuie recapitulată *definiția înmulțirii, pe baza mulțimii produs (cartezian) și a ilustrării posibilității de găsire a produsului prin adunarea repetată a celui de al doilea factor, de cîte ori ne arată primul factor.* (Această posibilitate se deduce din prima definiție, dar poate fi luată și ca definiție independentă a înmulțirii numerelor naturale).

15°. Se va acorda toată atenția rezolvării problemelor *de separare a unei mulțimi în submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd același număr de elemente, cînd cunoaștem : numărul de elemente dintr-o submulțime* (procedeul prin cuprindere) ; *numărul de submulțimi* (procedeul prin părți egale).

Abia după ce rezolvarea va fi bine însușită, pe bază de utilizare a unui material concret, aceste probleme vor fi folosite la *introducerea și efectuarea împărțirii exacte, atît prin cuprindere cît și prin părți egale.*

Cunoștințele de mai sus, referitoare la înmulțire și împărțire, trebuie să formeze suportul din care să derive apoi tehnica de calcul, folosind automatismele în cunoașterea tablei înmulțirii și împărțirii.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema 1

NOȚIUNI DESPRE MULȚIMI

Problema 2

a) $A = \{a, r, c, t, e\}$; *b)* $B = \{a, r, c\}$; *c)* m.

Problema 3

a) $\{a, r, c\} = B$; *b)* $\{a, r, c, t, e\} = A$; *c)* $\{t, e\}$; *d)* $\{\ \}$.

Problema 4

a) $12 + 9 + 8 + 15 = (12 + 8) + (9 + 15)$
$= 20 + 24$
$= 44$

b) $36 + 9 + 8 + 3 = 36 + 9 + (8 + 3)$
$= 36 + (9 + 11)$
$= 36 + 20$
$= 56$

c) $12 + 9 + 8 + 15 + 36 + 3 = (12 + 9 + 8 + 15) + 36 + 3$
$= (44 + 36) + 3$
$= 80 + 3$
$= 83$

d) $12 + 15 + 36 + 3 = (12 + 15) + 36 + 3$
$= (27 + 3) + 36$
$= 30 + 36$
$= 66$

e) $9 \times 8 = 72$.

Problema 5

a) Falsă, deoarece a și b aparțin lui A dar nu aparțin lui B;

b) adevărată, fiecare element al lui B aparținînd și lui A;

c) falsă, deoarece A și B nu sînt formate exact din aceleași elemente.

Problema 6

a) $\{a, m, n, r, b\} = A$; *b)* $\{a, b\}$; *c)* $\{\ \}$; *d)* $\{m, n, r\} = B$.

Problema 7

a) Falsă, C avînd elemente ca 12 și 15 care nu aparțin lui D;

b) falsă, D avînd elemente ca 36 și 3 care nu aparțin lui C;

c) falsă, mulțimile C și D nefiind formate exact din aceleași elemente.

Observăm că din cele trei afirmații nu este obligatoriu ca cel puțin una să fie adevărată.

Problema 8

a) $\{3; 5; 2; 8; 7; 9\}$; *b)* $\{7; 9; 8; 2; 3; 5\} = \{3; 5; 2; 8; 7; 9\}$; *c)* $\{3; 5\}$; *d)* $\{7; 9\}$; *e)* $\{2; 8\}$; *f)* $\{2; 8\}$.

Problema 9

a) Figura 38 arată că se poate stabili o corespondență unu la unu între mulțimile A și B. (Observăm că elementul 2 din mulțimea A a fost pus în corespondență cu elementul 2 din mulțimea B. Pentru 8 avem aceeași situație). Deci afirmația este adevărată;

b) falsă, întrucît se poate realiza, după cum s-a văzut, o corespondență unu la unu între A și B.

Observăm că din cele două afirmații una este sigur adevărată, iar cealaltă este sigur falsă.

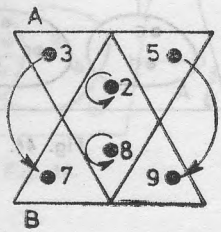


Fig. 38.

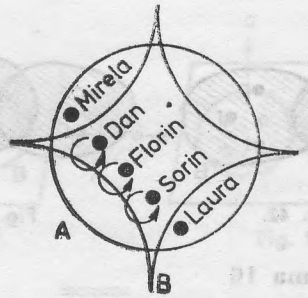


Fig. 39.

Problema 10

a) Falsă, figura 39 arătînd că rămîn elemente în A (Mirela și Laura de exemplu), fără corespondent în B; *b)* adevărată, din motivul pentru care prima afirmație a fost falsă.

Problema 11

Înlocuind punctele cu expresia „egal" se obține o propoziție adevărată. Răspunsul se obține fără numărare dacă se stabilește o corespondență unu la unu între mulțimile A și B, de exemplu așa cum arată figura 38.

Problema 12

Înlocuind punctele cu expresia „mai mare decît" se obține o propoziție adevărată. Fără numărare, răspunsul rezultă dintr-o figură ca 39 care arată că în A rămîn elemente fără corespondent în B.

Problema 13

Din figura 40 se vede ușor:

$29 + 20 = 49$; $20 + 41 = 61$. Deci A are 49 și B are 61 de elemente.

Problema 14

Din figura 41 se vede că: *a)* $28 + 34 = 62$; $34 + 36 = 70$; *b)* $28 + 34 + 36 = 98$ sau $62 + 36 = 98$ sau $28 + 70 = 98$.

Problema 15

$A = \{p, a, g, l\}$; $B = \{s, i, l, t, o, r\}$.

a) 4; *b)* 6; *c)* $\{p, a, g, l, s, i, t, o, r\}$ este reuniunea lui A cu B, care are 9 elemente; *d)* $\{l\}$ este intersecția lui A cu B care are 1 element; *e)* $\{p, a, g\}$ este diferența dintre A și B, care are 3 elemente; *f)* $\{s, i, t, o, r\}$ este diferența dintre B și A, care are 5 elemente.

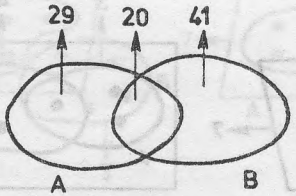


Fig. 40.



Fig. 41.

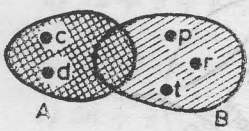


Fig. 42.

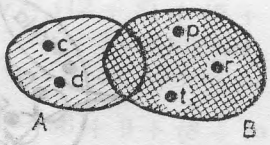


Fig. 43.

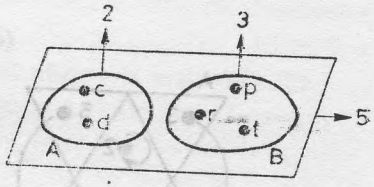


Fig. 44.

Problema 16

Fie $A = \{c, d\}$ și $B = \{p, r, t\}$.

a) Figura 42 ilustrează că elementele ce aparțin reuniunii lui A cu B, dar nu aparțin lui A, sînt tocmai elementele mulțimii B.

b) Figura 43 ilustrează că elementele ce aparțin reuniunii lui A cu B, dar nu aparțin mulțimii B, sînt tocmai elementele mulțimii A.

c) Oricare din figurile 42 și 43 arată că reuniunea lui A cu B are 5 elemente. A și B fiind disjuncte, figurile 42 și 43 pot fi înlocuite cu figura 44. Din figura 44 rezultă $5 - 2 = 3$.

d) Tot din figura 44 rezultă $5 - 3 = 2$.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 2-a

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 100 FĂRĂ ȘI CU TRECERE PESTE ORDIN

Exercițiul 1

Figura 45 și altele asemănătoare.

Exercițiul 2

$A = \{b, c\}$; $B = \{d, f, g, h\}$. Reuniunea lui A cu B este $\{b, c, d, f, g, h\}$ și are 6 elemente. Deci $2 + 4 = 6$.

Celelalte se rezolvă asemănător.

Exercițiul 3

Adevărată, dacă mulțimile A și B sînt disjuncte și falsă, dacă A și B au elemente comune, ceea ce rezultă din figurile 46, 47, 48 și 49.

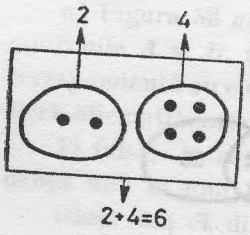


Fig. 45.

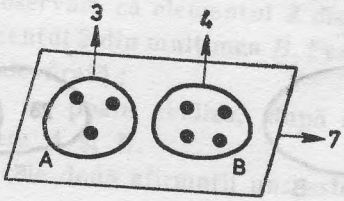


Fig. 46.

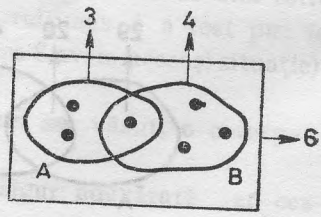


Fig. 47.

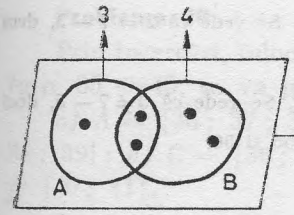


Fig. 48.

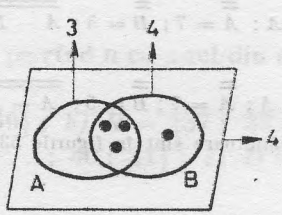


Fig. 49.

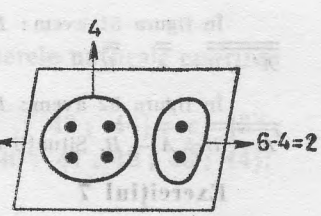


Fig. 50.

În figura 46 avem: $A \cap B = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = 3$, $\overline{\overline{B}} = 4$, $\overline{\overline{A \cup B}} = 7$. Se vede că $7 = 3 + 4$, deci $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

În figura 47 avem: $\overline{\overline{A \cap B}} = 1$, $\overline{\overline{A}} = 3$, $\overline{\overline{B}} = 4$, $\overline{\overline{A \cup B}} = 6$. Se vede că $6 < 3 + 4$, deci $\overline{\overline{A \cup B}} < \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$. Situații asemănătoare sînt în figurile 48 și 49.

Exercițiul 4

Figura 50 și altele asemănătoare.

Exercițiul 5

$A = \{b, c, d, f, g, h\}$; $B = \{c, d, f, g\}$. Diferența dintre A și B este mulțimea $\{b, h\}$ care are 2 elemente. Deci $6 - 4 = 2$.

Celelalte se rezolvă asemănător.

Exercițiul 6

Adevărată, dacă mulțimea B este inclusă în mulțimea A și falsă, dacă există elemente ale mulțimii B care nu aparțin și mulțimii A, ceea ce rezultă din figurile 51, 52, 53, 54, 55 și 56.

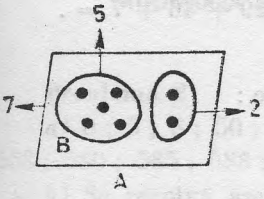


Fig. 51.

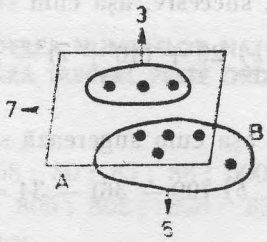


Fig. 52.

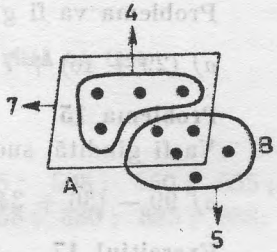


Fig. 53.

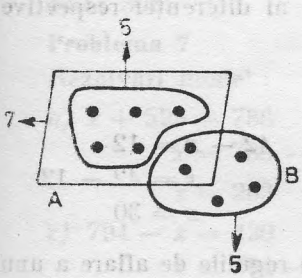


Fig. 54.

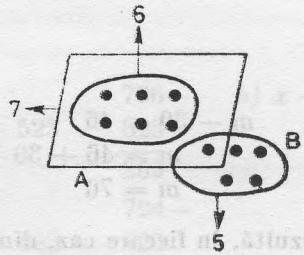


Fig. 55.

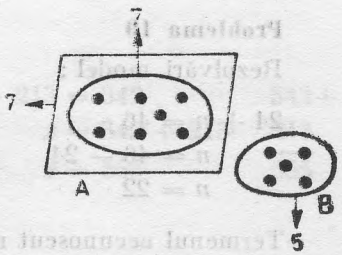


Fig. 56.

În figura 51 avem: $B \subset A$; $\overline{\overline{A}} = 7$; $\overline{\overline{B}} = 5$; $\overline{\overline{A - B}} = 2$. Se vede că $2 = 7 - 5$, deci $\overline{\overline{A - B}} = \overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}}$.

În figura 52 avem: $B \not\subset A$; $\overline{\overline{A}} = 7$; $\overline{\overline{B}} = 5$; $\overline{\overline{A - B}} = 3$. Se vede că $3 \neq 7 - 5$, deci $\overline{\overline{A - B}} \neq \overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}}$. Situații asemănătoare sînt în figurile 53, 54, 55 și 56.

Exercițiul 7

Adunarea este totdeauna posibilă, putînd face întotdeuna reuniunea a două mulțimi disjuncte.

Scăderea nu este totdeauna posibilă, întrucît dacă scăzătorul este mai mare decît descăzutul, la aplicarea regulii de scădere nu vom putea alege mulțimea model pentru scăzător, ca o submulțime a mulțimii model pentru descăzut.

Exercițiul 9

$$\begin{aligned} a)\ 4 + 3 + 9 &= (4 + 3) + 9 \\ &= 7 \quad + 9 \\ &= 16 \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} 4 + 3 + 9 &= 4 + (3 + 9) \\ &= 4 + \ 12 \\ &= 16 \end{aligned}$$

S-a folosit asociativitatea adunării numerelor naturale. Celelalte adunări se fac în mod asemănător.

Exercițiul 13

Se vor efectua mai întîi oral, apoi în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele.

Problema 14

Problema va fi gîndită, succesiv, așa cum sugerează scrierile:

a) $(29 + 46) + 7 =$; *b)* $29 + (46 + 7) =$; *c)* $29 + 46 + 7 =$.

Problema 15

Va fi gîndită, succesiv, așa cum sugerează scrierile:

a) $99 - (36 + 34) =$; *b)* $(99 - 36) - 34 =$

Exercițiul 17

Fiecare scădere se va efectua mai întîi oral, apoi în scris. Proba se va face în scris, numai după ce s-a făcut calculul în scris al diferenței respective.

Problema 19

Rezolvări model:

$$\begin{aligned} 24 + n &= 46 \\ n &= 46 - 24 \\ n &= 22 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} m - 30 &= 46 \\ m &= 46 + 30 \\ m &= 76 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 42 - x &= 12 \\ x &= 42 - 12 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Termenul necunoscut rezultă, în fiecare caz, din regulile de aflare a unui termen al adunării sau scăderii, cînd se cunosc rezultatul și celălalt termen.

Problema 20

Prin încercări, înlocuind pe rînd n cu unul din numerele naturale cuprinse între 35 și 45, se va găsi :

a) $A = \{36 ; 37 ; 38 ; 39\}$; *b)* $B = \{37 ; 38 ; \ldots ; 43 ; 44\}$; *c)* $\{37 ; 38 ; 39\}$; *d)* $C = \{36 ; 37 ; \ldots ; 40 ; 41\}$; *e)* $D = \{40 ; 41 ; 42 ; 43 ; 44\}$; *f)* $\{40 ; 41\}$.

Se observă că la (*c*) avem ca soluție $A \cap B$, iar la (*f*) avem $C \cap D$.

Problema 23

Rezolvarea poate fi scrisă :

a) $34 + 18 = 52$ baloane roșii ;
$52 + 34 = 86$ baloane galbene și roșii ;
$90 - 86 = 4$ baloane sînt albastre ;

b) $34 + 18 = 52$ baloane roșii ;
$90 - 34 = 56$ baloane roșii și albastre ;
$56 - 52 = 4$ baloane sînt albastre ;

c) $90 - 34 - (34 + 18) = 90 - 34 - 52$
$= 56 - 52$
$= 4$ baloane albastre.

Problema 24

De exemplu : Ana a avut pe carnetul CEC economisiți 80 lei. Dacă a scos întîi 28 lei, apoi încă 36 lei, cîți lei mai are pe acel carnet CEC ?

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 3-a

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 1000 FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN

Problema 2

a) 0 ; 5 ; 8 ; 50 ; 55 ; 58 ; 80 ; 85 ; 88 ; 500 ; 505 ; 508 ; 550 ; 555 ; 558 ; 580 ; 585 ; 588 ; 800 ; 805 ; 808 ; 850 ; 855 ; 858 ; 880 ; 885 ; 888;

b) Se rezolvă asemănător.

Problema 3

830 ; 308.

Problema 7

Rezolvări model :

a) $x + 523 = 786$
$x = 786 - 523$
$x = 263$

$786 -$
523
263

b) $x - 213 = 342$
$x = 342 + 213$
$x = 555$

$342 +$
213
555

c) $794 - x = 420$
$x = 794 - 420$
$x = 374$

$794 -$
420
374

Problema 11

a) $(789 - 243) - 325 = 546 - 325 = 221$ *a)*

$$\begin{array}{r} 789- \\ 243 \\ \hline 546 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 546- \\ 325 \\ \hline 221 \end{array}$$

b) $789 - (243 + 325) = 789 - 568 = 221$ *b)*

$$\begin{array}{r} 243+ \\ 325 \\ \hline 568 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 789- \\ 568 \\ \hline 221 \end{array}$$

Problema 13

x poate fi unul din elementele mulțimii :

a) $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 7 ; 8\}$; *b)* $\{0, 1\}$; *c)* $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

Problema 14

$(324 + 110) + (324 + 110) =$, sau $(324 + 324) + (110 + 110) =$,

ceea ce revine la a face o adunare cu patru termeni :

$$324 + 324 + 110 + 110 =$$

Problema 15

a) Pentru ca rezolvarea să se scrie $890 - (320 + 310) =$, gîndim astfel : aflăm, mai întîi, cîte kilograme de fier vechi au colectat împreună primele două detașamente ; scăzînd această cantitate din cea totală, rezultă cîte kilograme de fier vechi a colectat al treilea detașament.

b) Pentru ca rezolvarea să se scrie $(890 - 320) - 310 =$, gîndim astfel : scăzînd din cantitatea totală, cît a colectat primul detașament, obținem cît au colectat împreună al doilea și al treilea detașament ; scăzînd din această cantitate de fier vechi, cît a colectat al doilea detașament, aflăm cît a colectat al treilea detașament.

Problema 16

Pentru prima scriere, calculăm diferența din prima parte a egalității :

$$986 - 542 = 444$$

și apoi diferența din partea a doua a egalității :

$$867 - 420 = 447$$

Cum $444 \neq 447$, rezultă că scrierea dată este falsă.

Procedînd analog, cea de a doua scriere se găsește că este adevărată.

Exercițiul 19

Pentru rîndul al doilea :

$$697 - (302 + 253) =$$

Pentru rîndul al treilea :

$$997 - (201 + 370) =$$

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 4-a

ÎNMULȚIREA ȘI ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE

Problema 1

b) Fig. 57; *c)* mulțimea produs; $B \times F$; fig. 58; *mulțimi factori*; *d)* 3×2. Prin numărare găsim: $3 \times 2 = 6$.

Problema 2

a) Fig. 59 arată răspunsurile posibile: zarzără verde; zarzără galbenă; zarzără roșie; prună verde; prună galbenă; prună roșie.

b) $F \times C = \{(z, v), (z, g), (z, r), (p, v), (p, g), (p, r)\}$;

c) mulțimea produs a mulțimii F prin mulțimea C; $F \times C$; fig. 60.

d) 2×3 în fig. 60.

Problema 3

Fig. 61.

Problema 5

Figurile 62, 63, 64, 65, 66 și 67

Problema 8

$6 + 6 + 6 = 3 \times 6$; $3 \times 6 = 18$, după cum rezultă din fig. 68. Produsul 18 se găsește prin numărare, după reprezentarea elementelor mulțimii produs prin puncte.

Celelalte operații se efectuează analog.

Problema 9

$7 \times 6 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$; $5 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9$;

$233 \times 2 = 233 + 233$; $4 \times 211 = 211 + 211 + 211 + 211$

Se efectuează apoi adunările repetate obținute, scriind la nevoie numerele unele sub altele.

Problema 10

Exemplu:

$9 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ este primul mod;

$9 \times 4 = 9 + 9 + 9 + 9$ este al doilea mod.

Se efectuează fiecare din aceste adunări.

Problema 11

Se pot folosi ca model mulțimi de puncte și procedeul din figura 61. Rezultatele se află numărînd punctele ce reprezintă elementele mulțimii produs.

Problema 13

$5 \times 2 =$, etc. Rezultatele se scriu folosind tabla înmulțirii.

Problema 14

a) $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$; *b)* $5 \times 4 = 20$ (rezultatul pe baza tablei înmulțirii)

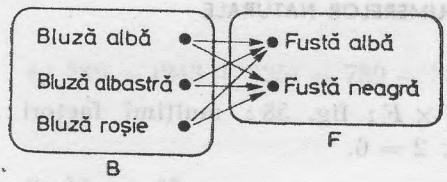


Fig. 57.

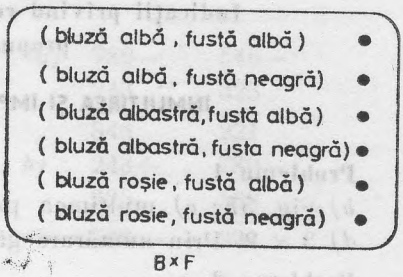


Fig. 58.

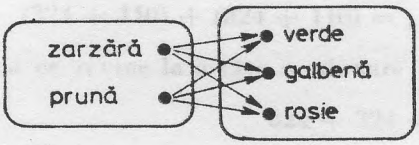


Fig. 59.

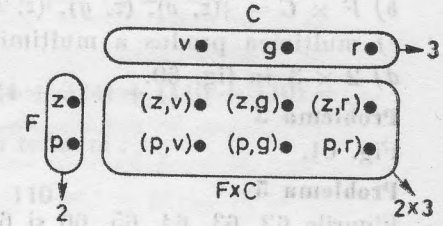


Fig. 60.

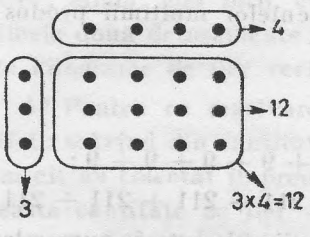


Fig. 61.

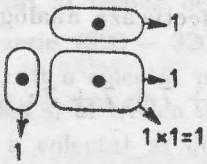


Fig. 62.

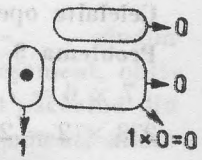


Fig. 63.

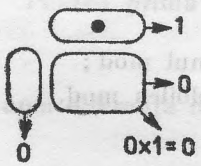


Fig. 64.

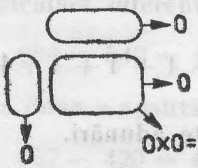


Fig. 65.

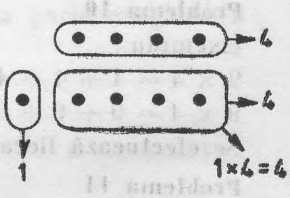


Fig. 66.

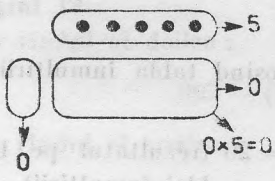


Fig. 67.

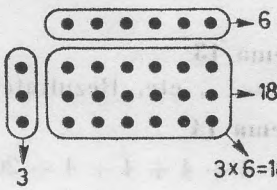


Fig. 68.

Problema 20

a) $5 \times 6 = 30$; *b)* $4 \times 2 \times 3 = 24$; *c)* $8 \times 9 = 72$

Problema 21

Penultimul rînd : $c = 95 - (8 \times 5)$
$= 95 - 40$
$= 55$

Pentru ultimul rînd, același procedeu.

Problema 23

$(6 \times 6) - (2 \times 6) = 36 - 12 = 24$. Răspuns : 24 de ani.

Problema 24

Se lucrează practic, descriind ceea ce se face : se iau 3 bețișoare din cele 21, apoi alte 3 din cele rămase, ș.a.m.d. Procedeul prin „cuprindere".

Problema 25

Se lucrează practic, descriind ceea ce se face : din cele 21 bețișoare se distribuie cîte 1 în fiecare din cele 3 grămezi, apoi încă cîte 1, ș.a.m.d. Procedeul prin „părți egale".

Problema 26

Se iau, de exemplu, 21 de boabe de fasole (sau 21 de discuri din trusa pentru studiul numerelor naturale).

a) Se separă în submulțimi disjuncte a cîte 3 elemente fiecare, prin procedeul numit prin „cuprindere". Numărînd cîte submulțimi s-au obținut, găsim 7. Scriem $21 : 3 = 7$.

b) Se separă mulțimea celor 21 boabe de fasole în 3 submulțimi disjuncte două cîte două, astfel încît fiecare submulțime să aibă același număr de elemente, folosind procedeul prin „părți egale". Se numără cîte elemente are o submulțime. Găsind 7 elemente, scriem $21 : 3 = 7$.

Exercițiul 27

Nu sînt posibile acele împărțiri la care, pînă la urmă, rămîn elemente în afara submulțimilor disjuncte care se formează.

Exercițiul 28

$24 : 6 = 4$ efectuată prin cuprindere ;
$24 : 4 = 6$ efectuată prin părți egale ;
$4 \times 6 = 24$ rezultatul aflîndu-se prin numărarea elementelor mulțimii produs, sau prin adunarea repetată a lui 6 ;
$6 \times 4 = 24$ rezultat dedus din cel anterior, prin comutativitate.

Problema 30

a) $14 : 2 = 7$; *b)* $14 : 7 = 2$; *c)* $7 \times 2 = 14$; $2 \times 7 = 14$.

Exercițiul 31

Exemple :

$24 - 6 = 18$
$18 - 6 = 12$
$12 - 6 = 6$
$6 - 6 = 0$

S-au putut face 4 scăderi și ultimul rest este 0, deci:
$24 : 6 = 4$

$37 - 8 = 29$ S-au putut face 4 scăderi și a rămas ultimul rest
$29 - 8 = 21$ 5. Deci : $37 : 8 =$ este împărțire imposibilă.
$21 - 8 = 13$
$13 - 8 = 5$
$5 - 8 =$ imposibil

Exercițiul 32

Exemplu : $10 : 5 =$

Figurile 69 și 70 indică, respectiv, împărțirea prin cuprindere și prin părți egale. Al treilea mod este scăderea repetată :

$10 - 5 = 5$ S-au putut face două scăderi și ultimul rest este 0.
$5 - 5 = 0$ Deci cîtul este 2.

$10 : 5 = 2$

Exercițiul 33

$40 : 5 = 8$; $8 \times 5 = 40$; $5 \times 8 = 40$. Pentru $3 \times 9 = 27$ avem $9 \times 3 = 27$; $27 : 9 = 3$ și $27 : 3 = 9$.

Exercițiul 34

Pentru $42 : 7 =$, aflăm prin cuprindere, prin părți egale (folosind mulțimi model), prin scădere repetată, sau prin tabla împărțirii :

$42 : 7 = 6$. Probe : $42 : 6 = 7$; $7 \times 6 = 42$; $6 \times 7 = 42$.

Pentru $5 \times 9 =$ aflăm, folosind mulțimi model și mulțimea produs, adunarea repetată sau tabla înmulțirii : $5 \times 9 = 45$. Probe : $9 \times 5 = 45$; $45 : 9 = 5$; $45 : 5 = 9$.

Exercițiul 35

Pentru : $15 : 3 =$, observăm că $3 \times 5 = 15$. Deci $15 : 3 = 5$ etc.

Problema 36

$18 : 3 = 6$. Este o împărțire prin părți egale.

Problema 37

$18 : 3 = 6$ Este o împărțire prin cuprindere.

Problema 38

$15 : 5 = 3$. Este o împărțire prin părți egale.

Problema 39

$15 : 3 = 5$. Este o împărțire prin cuprindere.

Problema 40

Structura fiecărei probleme este de împărțire prin părți egale, ceea ce impune împărțirea fiecărui număr la 4. Efectuarea împărțirii obținute se va face însă folosind tabla împărțirii.

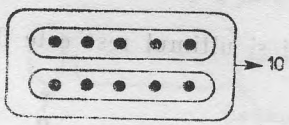


Fig. 69.

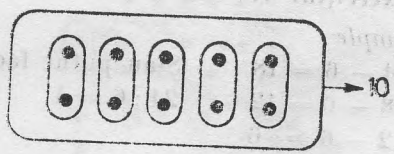


Fig. 70.

Exercițiul 42

La înmulțire și împărțire, se vor folosi regulile de calcul ale unui număr, știind rezultatul și celălalt număr.

Exercițiul 43

a) $9 \times 2 : 3 = 18 : 3 = 6$ etc.

Problema 45

$4 \times 5 = 20$	Merele au costat 20 lei.
$2 \times 8 = 16$	Piersicile au costat 16 lei.
$20 + 16 = 36$	Pe mere și piersici a plătit 36 lei.
$50 - 36 = 14$	Pentru struguri i-au rămas 14 lei.
$14 : 2 = 7$	Kilogramul de struguri a costat 7 lei.

Exercițiul 47

a) Notînd, respectiv, cu n și p numerele reprezentate de cele două părți ale egalității, avem :

$$n = (8 \times 9) - 36 \qquad p = 4 \times (72 : 8)$$
$$n = \quad 72 \quad - 36 \qquad p = 4 \times 9$$
$$n = 36 \qquad\qquad p = 36$$

Calculul fiecărei părți a egalității ne-a dat $n = p$. Așadar, prima scriere este adevărată. Pentru a doua scriere :

$$n = 32 + (56 : 7) \qquad p = (6 \times 9) - 24$$
$$n = 32 + 8 \qquad\qquad p = 54 - 24$$
$$n = 40 \qquad\qquad p = 30$$

Se vede că $n \neq p$. Deci scrierea este falsă.

b) Se calculează numărul reprezentat de partea a doua a egalității. Se găsește 89, deci prima scriere este justă. La scrierea a doua calculul dă pentru prima parte a egalității numărul 31. Cum avem $31 \neq 32$, scrierea este falsă.

Problema 48

$(54 : 6) + (42 : 6) = 9 + 7 = 16$ Au folosit 16 lădițe.

Capitolul II

ADUNAREA ŞI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 1000, CU TRECERE PESTE ORDIN

A. SCURTE OBSERVAŢII ASUPRA CONŢINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

1. Folosind noţiunile despre mulţimi deja studiate, principiul numirii şi scrierii numerelor mai mari ca 100, legătura dintre adunare şi scădere dedusă din definiţiile acestora prin intermediul mulţimilor precum şi mulţimi cu elementele sute, zeci şi unităţi, în mod potrivit alese, după caz, se vor face adunări şi scăderi grupate pe tipuri, după accesibilitate şi algoritmul de calcul.

Pentru ilustrarea unor tehnici de calcul se vor folosi parantezele. Toate exerciţiile de un anumit tip vor finaliza cu prezentarea efectuării calculelor în scris (scriind numerele unele sub altele).

Se vor face adunări şi cu mai mult de două numere naturale.

2. Exerciţii şi probleme (nu prea complicate, cu cel mult două operaţii).

Exerciţii de tipul : $x + 624 = 700$; $945 - x = 732$, cu scrierea soluţiilor : $x = 700 - 624$; $x = 945 - 732$.

Exerciţii de tipul : $x + 628 < 631$; $x + 628 \leqslant 631$; $902 - x > 897$; $902 - x \geqslant 897$; $x - 721 < 6$; $x - 721 \leqslant 6$, x calculîndu-se prin încercări.

La unele din adunările şi scăderile făcute în acest capitol se vor face şi probele.

Probleme cu date din economie, cu elemente de constituire a unui plan scris de rezolvare (foarte concis).

2. CUNOŞTINŢE ŞI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Să înţeleagă *deducerea regulilor de calcul* în toate situaţiile ce ţin de conţinutul programei expuse mai sus, să *cunoască aplicarea acestor reguli de calcul oral şi în scris, formîndu-şi deprinderi de lucru, pînă la automatisme.*

Pentru deducerea diverselor tehnici de calcul cu numere naturale elevii vor fi conduşi să înlocuiască problema formulată cu numere, printr-o problemă conţinînd operaţii cu mulţimi, folosind mulţimi model pentru numerele respective, de regulă realizate cu piesele trusei pentru studiul numerelor naturale.

Alegînd pentru termenii operației mulțimile model cu structură numerică zecimală, se va căuta obținerea mulțimii model pentru numărul rezultat al operației tot ca structură numerică zecimală. Cu acest prilej se vor face cît mai puține modificări în structura numerică zecimală a mulțimilor model pentru termeni. În acest mod elevii vor fi conduși pe o cale firească, ușor de urmărit, către *regulile practice de efectuare a operațiilor* care ne interesează. Conștientizînd aceste reguli, elevii vor înțelege motivația conținutului lor (fără a fi neapărat necesar să exprime în cuvinte toate procesele de gîndire care au loc). Aceasta va contribui la aplicarea lor corectă, la dobîndirea în timp scurt a unor deprinderi de lucru și la formarea de automatisme.

Utilizarea mulțimilor model pentru deducerea diverselor reguli de calcul și exprimarea în limbajul mulțimilor va ilustra *extinderea ideilor fundamentale întîlnite la studiul adunării și scăderii numerelor naturale mai mici decît 100, în cazul adunării și scăderii numerelor naturale mai mici decît 1 000.* Desigur, vor trebui cunoscute și însușite tehnicile și procedeele de lucru specifice adunării și scăderii numerelor din această mulțime numerică. *Nu se va insista prea mult asupra calculului oral cu trecere peste ordin, în cazurile mai greoaie,* folosind timpul pentru însușirea temeinică a calculului în scris în astfel de cazuri.

Trebuie avut grijă ca printre exemplele și exercițiile aplicative să fie selecționate toate situațiile care pot fi întîlnite.

Scrierea planului de rezolvare la unele probleme nu trebuie să se transforme într-un scop în sine, ci să asigure o mai bună înțelegere a modului în care se gîndește rezolvarea. De aceea redactarea trebuie să fie cît mai concisă și sugestivă, fără a necesita scrieri laborioase.

Trebuie observat clar că aflarea *rezultatului oricărei adunări sau scăderi de numere naturale este posibilă folosind definițiile cu mulțimi ale acestor operații și numărarea* (se aleg mulțimi model pentru termeni, care să satisfacă cerințele definițiilor respective, se formează mulțimea reuniune sau diferență și se numără elementele acestora din urmă). *Principiul este simplu, dar în practică se complică mai ales din cauza numărărilor necesare.*

În esență, *orice regulă de calcul pe care* o stabilim aici *nu face altceva decît să indice o cale de evitare a acestor numărări. Soluția o oferă folosirea ideii de structură numerică zecimală a mulțimii și reprezentarea prin figuri numerice,* fie că sînt desenate, fie că sînt realizate „obiectual" pe panourile trusei pentru studiul numerelor naturale.

Pornind de la definițiile cu mulțimi a operațiilor de adunare și scădere a numerelor naturale și reprezentînd structurile numerice zecimale ale mulțimilor model pentru termeni cu ajutorul figurilor numerice, se caută modul cel mai simplu de a găsi structura numerică zecimală a mulțimii model pentru rezultatul operației. În acest scop vom opera cît mai puține modificări în structurile numerice zecimale ale termenilor. Modul în care se poate realiza acest lucru duce la regula de calcul în situația respectivă.

Așadar, regulile de calcul într-o situație dată se deduc folosind definițiile operațiilor dar nu trebuie confundate cu înseși aceste definiții.

În scopul deducerii regulilor de calcul, pentru a putea realiza o derulare logică a conținutului de idei, motivînd fiecare pas nou, este necesară delimitarea corectă a acestor pași (ca unități ce grupează toate cazurile asemănătoare, la care se aplică aceeași tehnică de calcul), și *găsirea unei ordini de prezentare a cunoștințelor care să permită această derulare.* Așa se explică eșalonarea în noul manual a cunoștințelor uneori într-o altă ordine decît aceea din manualele anterioare.

În această ordine de idei subliniem faptul că adunări ca $7+3=$, sau $8+5=$, sînt cu *trecere peste ordinul unităților*, deoarece cu ocazia efectuării lor se completează o unitate de ordin superior unităților simple (o zece). De asemenea, $70+30=$, sau $45+61=$, sînt adunări cu *trecere peste ordinul zecilor*, deoarece cu ocazia efectuării lor se completează o unitate de ordin superior zecilor (o sută).

Expresia „trecerea peste ordin" este mai potrivită decît „trecere peste zece" sau „trecere peste sută", acestea din urmă reținînd ca esențial în situația respectivă obținerea unui rezultat mai mare ca 10 sau 100, și nu procedeul prin care se găsește rezultatul (cum ar trebui). Cu acest sens, $8+5=$ este o adunare cu trecere peste zece, dar $7+3=$ nu este adunare cu trecere peste zece, deși *este clar că cele două adunări se efectuează cu aceeași tehnică de calcul (completarea zecii), deci sînt de același tip.* La fel, $45+61=$ este o adunare cu trecere peste sută, dar $70+30=$ nu este o adunare cu trecere peste sută, deși *amîndouă se efectuează prin același procedeu (completarea sutei) fiind de același tip.*

Observațiile de mai sus conduc la eșalonarea adunării numerelor naturale întîi în mulțimea numerelor naturale de la 0 la 9, apoi în mulțimea numerelor naturale de la 0 la 99, apoi în mulțimea numerelor naturale de la 0 la 999.

Un alt fapt care trebuie scos în evidență este acela *că adunarea cu trecere peste ordin trebuie să fie studiată după ce s-a studiat scăderea din 10, respectiv din 100.* În adevăr, pentru a afla cu cît trebuie completat unul din termeni pînă la 10, sau pînă la 100, este nevoie a face o scădere de tipul menționat (chiar dacă se spune direct cu cît trebuie făcută completarea, în mintea noastră, inconștient, această scădere are loc).

Tocmai descompunerea unui termen într-o sumă de doi termeni din care unul servește la completarea zecii sau sutei:

$$8+5=8+(2+3);\quad 80+50=80+(20+30)$$

este esența efectuării operației și elevul trebuie înarmat cu o tehnică de descompunere.

Această tehnică constă în efectuarea a două scăderi, din care una este de tipul menționat:

	$10-8=2$	respectiv:	$100-80=20$
	$5-2=3$		$50-20=30$
deci	$8+5=8+(2+3)$	deci	$80+50=80+(20+30)$

Efectuarea acestei descompuneri nu trebuie lăsată a se face „pe ghicite" de către elevi, dacă vrem să-i învățăm cu adevărat tehnica de calcul. *Ea este necesară tocmai elevilor care nu o „ghicesc".*

De aici nu rezultă că trebuie să cerem elevilor a ilustra de fiecare dată, verbal sau în scris, cum au gîndit pentru a face descompunerea respectivă, după ce au dobîndit deprinderi, automatisme în a o realiza. Dar trebuie să știe ce fac și cum trebuie procedat atunci cînd nu pot sesiza „direct" rezultatul operației.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL II

(Numărul de ore, orientativ = 25)

TEMA 1: SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE CÎND DESCĂZUTUL ESTE 100

Scop: Deducerea procedeelor de calcul oral și scris pe baza definiției cu mulțimi a scăderii și a utilizării unor mulțimi model pentru descăzut și scăzător, organizate cu structură numerică zecimală. Cunoașterea transfor-

mării unei sute în zeci și a unei zeci în unități, pentru efectuarea scăderilor de la subtemele 1, a 2-a și a 3-a ;

Material didactic

Pentru învățător : Trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale (panoul nr. 10). Planșe ca figurile 16, 17 și 18 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

SUBTEMA 1° : „SCĂZĂTORUL ESTE FORMAT NUMAI DIN ZECI"

a) Activități desfășurate cu elevii fără folosirea manualului

Se propun scăderile :

$$100 - 30 = \quad ; \quad 100 - 40 \quad ; \quad 100 - 60 =$$

Prima o efectuează învățătorul ca model, folosind panoul 10 din trusă. Se realizează pe panou mulțimea model pentru descăzut, așa cum se vede în figura 71. Ea are structură numerică zecimală.

Trebuie să alegem în ea o submulțime model pentru scăzătorul 30, dacă este posibil tot cu structură numerică zecimală. Lucrul nu este posibil, neavînd în mulțimea model a descăzutului elemente zeci. Din acest motiv transformăm suta în zeci, înlocuind pe panou patratul roșu cu 10 triunghiuri albastre, cum arată figura 72.

Alegem acum din mulțimea model a descăzutului o submulțime conținînd 3 zeci, pe care o luăm ca model pentru scăzătorul 30. Mulțimea diferență dintre mulțimea model a descăzutului și cea a scăzătorului are 7 zeci, după cum se vede din figura 73, care arată deplasarea pieselor pe panoul trusei.

După deplasarea pieselor, panoul 10 arată cum se vede în figura 74.

Recapitulînd procedeul folosit, cu ajutorul planșei conținînd figura 16 din manual, se deduce regula practică :

a) transformăm suta în 10 zeci ;

b) din cele 10 zeci luăm 3 zeci ;

c) cele 7 zeci rămase sînt rezultatul scăderii.

Modul cum gîndim poate fi scris, în baza lucrului pe panoul trusei :

$100 - 30 = 10$ zeci $- 3$ zeci
$= (10 - 3)$ zeci
$= 7$ zeci
$= 70$

Regula practică poate fi scrisă :
$100 - 30 = (10 - 3)$ zeci

Tot din lucrul pe panoul trusei rezultă calculul în scris :

·9	·	
100—	100—	100—
30	30	30
70	70	70

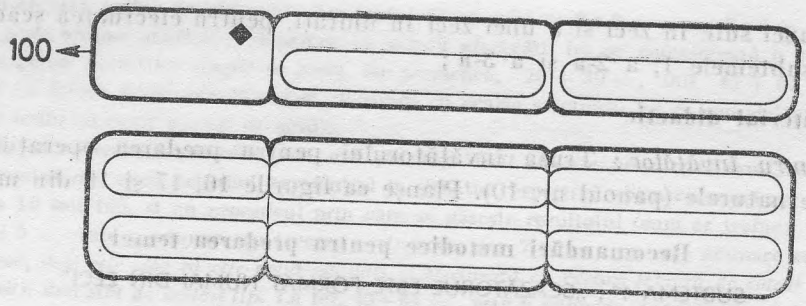


Fig. 71.

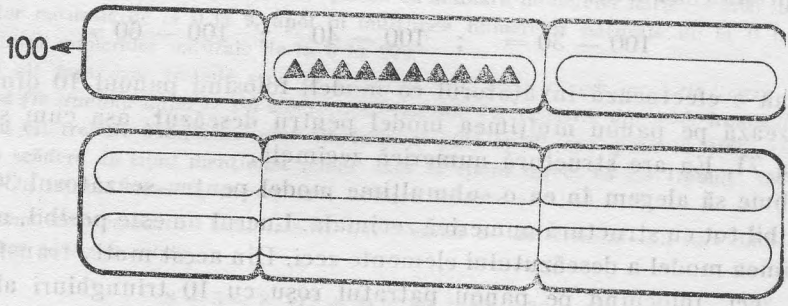


Fig. 72.

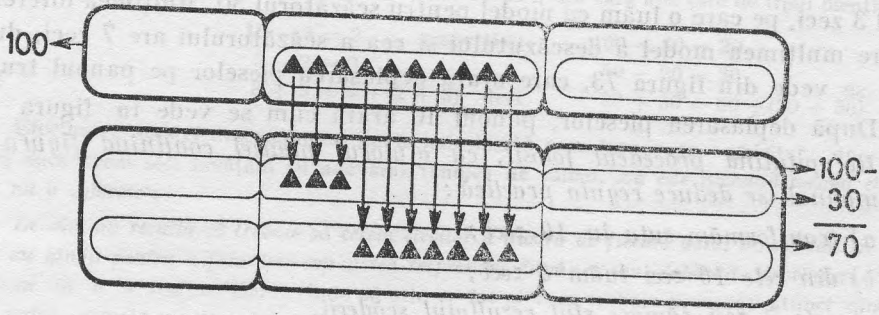


Fig. 73.

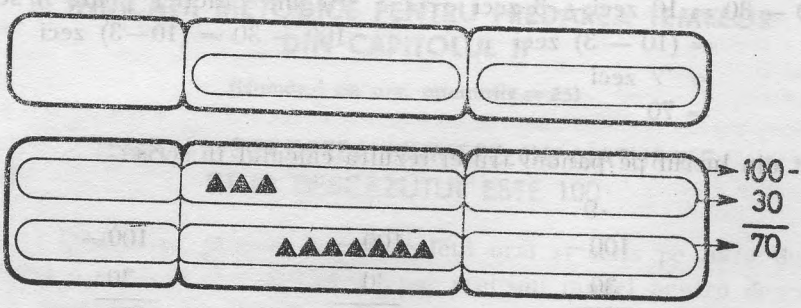


Fig. 74.

Prima scriere sugerează transformarea de unități care se face, a doua amintește prin punctul scris deasupra lui 1 că suta a fost transformată în zeci, adică avem în locul lui 0 zeci 10 zeci. Ultima scriere se va utiliza după ce se dobîndește deprinderea de a „ține minte" ceea ce se face pentru a efectua scăderea.

Deși pe panoul trusei, avînd aspectul din figura 74, se vede că reunind cele două mulțimi disjuncte, model pentru diferență, și respectiv, model pentru scăzător, se obține mulțimea model pentru descăzut, de unde proba scăderii prin adunare:

7 zeci + 3 zeci = 10 zeci; 7 zeci + 3 zeci = 1 sută;

$$70 + 30 = 100$$

se va renunța, pentru moment, la a face proba acestor scăderi prin adunare, deoarece încă nu s-au făcut adunări de forma 70 + 30 =, care formează obiectul temei următoare.

De pe panoul trusei, avînd aspectul din figura 74, se va observa că alegînd în mulțimea avînd 10 zeci, o submulțime avînd 7 zeci, rămîn în mulțimea diferență 3 zeci, adică avem:

$$100 - 70 = 30$$

de unde rezultă *proba scăderii prin scădere: scăzînd din descăzut, diferența, se obține scăzătorul.*

Celelalte scăderi propuse vor fi efectuate de elevi, folosind trusa învățătorului, urmărind aceleași idei ca și la prima scădere.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Sub îndrumarea învățătorului elevii vor explica ceea ce redă figura 16 din manual, deducîndu-se regula de calcul oral și în scris.

Se vor efectua în clasă exercițiile 1, 2 și 3.

Acasă se vor propune problemele 4 și 5.

SUBTEMELE 2° și 3°

Se predau după aceeași tehnologie didactică ca și prima, realizînd pe panoul 10 al trusei aspectele sugerate de figurile 17 și 18 din manual.

Etapele de valorificare a conținutului figurii 17 cu ajutorul panoului 10 din trusă pentru a efectua 100 — 6, sînt evidențiate în:

a) figura 71, care realizează mulțimea model pentru descăzut, avînd structură numerică zecimală. În ea trebuie aleasă o submulțime avînd 6 unități ca model pentru scăzător. Cum nu găsim astfel de unități:

b) figura 72 arată înlocuirea patratului roșu ce reprezintă suta, cu 10 triunghiuri albastre, adică 10 zeci. Din nou nu avem unități pentru a alege mulțimea model pentru scăzător, și:

c) figura 75 arată cum s-a înlocuit un triunghi albastru reprezentînd 1 zece, cu 10 discuri negre, adică 10 unități.

Acuma putem alege submulțimea model pentru scăzător din mulțimea unităților aflate în mulțimea model pentru descăzut. Figura 76 sugerează

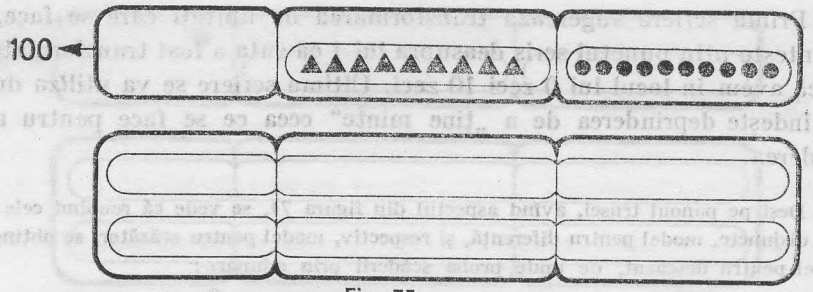


Fig. 75.

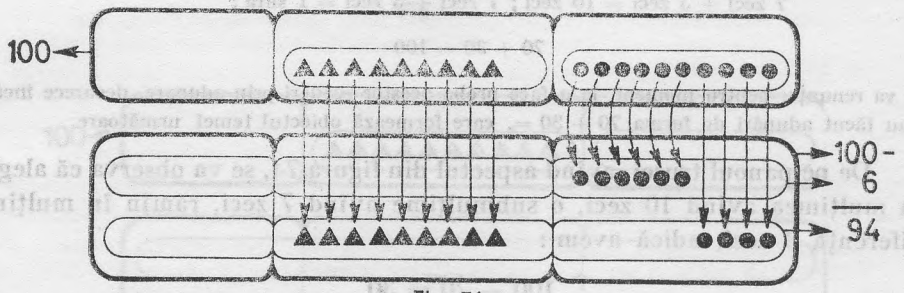


Fig. 76.

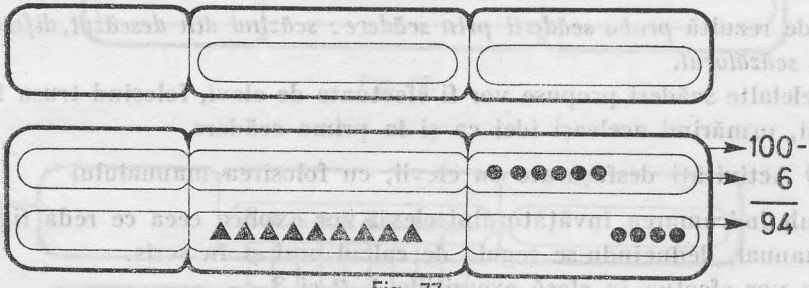


Fig. 77.

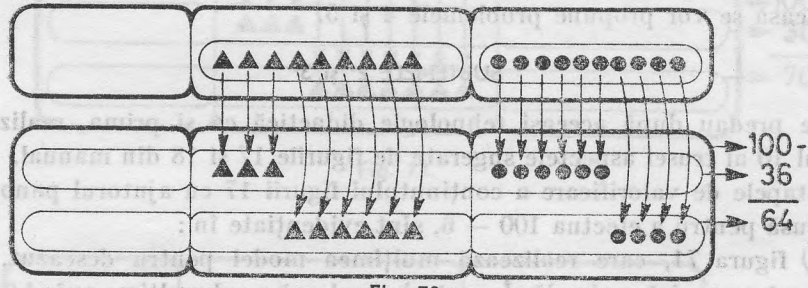


Fig. 78.

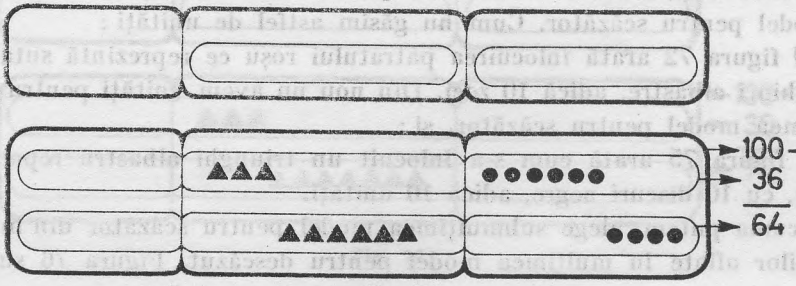


Fig. 79.

cum sînt deplasate piesele pe panoul trusei, astfel încît să separăm mulțimea model pentru descăzut în două submulțimi disjuncte, una model pentru scăzător și alta care reprezintă mulțimea diferență dintre cele două mulțimi, cea model pentru descăzut și cea model pentru scăzător.

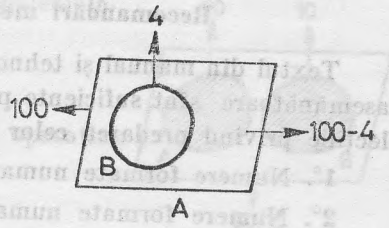


Fig. 80.

După deplasarea pieselor, panoul trusei arată ca în figura 77.

Pentru a efectua scăderea 100—36 = cu panoul 10 al trusei, figura 18 din manual va fi valorificată parcurgînd aceleași etape care au fost ilustrate în figurile 71, 72 și 75.

Alegerea submulțimii model pentru scăzătorul 36 și formarea mulțimii diferență a mulțimilor model pentru descăzut și scăzător se vede clar din figura 78.

După deplasarea pieselor, panoul 10 arată ca figura 79.

Pentru 100 — 6 = și 100 — 36 = probele prin adunare cer operațiile 94 + 6 = și 64 + 36 = care nu sînt încă studiate, iar pentru 100 — 6 = nici proba prin scădere nu poate fi făcută deocamdată, 100 — 94 = fiind în acest moment nestudiată.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema 1

Problema 4 (subtema 2°)

Din figura 80 rezultă că rezolvarea revine la efectuarea operației :

$$100 - 4 =$$

TEMA A 2-A : ADUNAREA CU TRECERE PESTE ORDIN A DOUĂ NUMERE NATURALE MAI MICI CA 100, AVÎND SUMA CEL PUȚIN 100

Scop : Deducerea procedeelor de calcul, pornind de la definiția cu mulțimi a adunării numerelor naturale și utilizînd pentru termeni mulțimi model organizate cu structură numerică zecimală. Procedeul de calcul va rezulta din procedeul de obținere a structurii numerice zecimale pentru reuniunea mulțimilor model a termenilor, făcînd cît mai puține modificări în structurile numerice zecimale ale termenilor.

Material didactic

Pentru învățător : Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul nr. 8). Planșe cu figurile 19, 20, 21 și 22 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Textul din manual și tehnologia didactică utilizate pînă acum în situații asemănătoare sînt suficiente pentru ca învățătorul să-și construiască singur lecțiile privind predarea celor trei subteme :

1°. Numere formate numai din zeci, avînd suma 100.

2°. Numere formate numai din zeci, avînd suma mai mare decît 100.

3°. Numere mai mici decît 100, avînd suma mai mare de 100, cînd are loc :

a) trecerea peste ordinul zecilor ;

b) trecerea peste ordinul unităților și peste ordinul zecilor.

Aici reținem doar atenția asupra faptului că, valorificînd figurile 19, 20, 21 și 22 din manual cu ajutorul mulțimilor model realizate pe panoul 8 al trusei, se va sublinia că mulțimile model pentru termeni sînt luate cu structură numerică zecimală, dar reuniunea lor nu se obține gata organizată cu structură numerică zecimală. În adevăr, reuniunea reprezentată în figuri prin linia ce înconjoară conturile mulțimilor model pentru termeni are, fie în submulțimea zecilor (figurile 19, 20 și 21), fie și în submulțimea zecilor și în submulțimea unităților (fig. 22), mai mult de 9 unități de ordinul respectiv.

Pentru a găsi numărul elementelor reuniunii trebuie să facem ca ea să aibă structură numerică zecimală. În acest scop este necesar a completa în reuniune unități de ordin superior, din unitățile de un anumit ordin ce se află în reuniune în număr mai mare ca 9. Aceasta se realizează cu ocazia deplasării pieselor reuniunii în partea de jos a panoului 8. Pentru situațiile din figurile 19, 20 și 21 din manual, din zecile existente în reuniune se completează 1 sută, restul de zeci rămînînd în submulțimea zecilor. În situația din figura 22 din manual, din unitățile existente se completează 1 zece care este pusă în mulțimea zecilor și, apoi, se formează din toate zecile existente 1 sută. Restul de zeci și de unități care nu au intrat în completarea zecii sau a sutei, rămîn în submulțimea zecilor și submulțimea unităților reuniunii.

În conturul de jos de pe panoul 8 s-a obținut reuniunea mulțimilor model a termenilor, organizată cu structură numerică zecimală, ceea ce permite numirea și scrierea numărului ei de elemente.

Din această tehnică de organizare cu structură numerică zecimală a reuniunii mulțimilor model pentru termeni, se deduc regulile de calcul cu numere naturale, în situațiile respective.

În momentul predării subtemelor, la subtema 1° se poate face proba prin adunare și proba prin scădere în două moduri, iar la subtemele 2° și 3° se pot face numai probele prin adunare, deoarece scăderile prin care s-ar face probele nu sînt încă învățate.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 2-a

Problema 6 (subtema 1°)

Din figura 81 rezultă rezolvarea, prin operația :

$$90 + 10 =$$

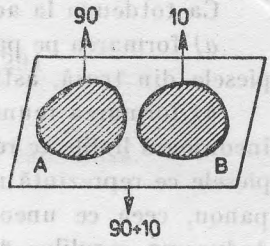


Fig. 81.

Problema 4 (subtema 3°, b)

O figură asemănătoare cu 81 duce la operația :

$$53 + 47 =$$

TEMA A 3-A : ADUNAREA CU TRECERE PESTE ORDIN A DOUĂ NUMERE NATURALE CÎND CEL PUȚIN UNUL ESTE MAI MARE CA 100

Scop : Același ca la tema anterioară.

Material didactic :

Pentru învățător :

Panourile 8 și 11 din trusa pentru studiul numerelor naturale. Planșe cu figurile 23, 24 și 25 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Textul din manual și tehnologia didactică utilizată pînă acum în situații asemănătoare sînt suficiente pentru elaborarea lecțiilor de către învățător, referitoare la cele patru subteme :

1°. Adunarea cu trecere peste ordinul unităților.

2°. Adunarea cu trecere peste ordinul zecilor.

3°. Adunarea cu trecere peste ordinul unităților și al zecilor.

4°. Adunarea cu mai mulți termeni, cu trecere peste ordin.

Recomandăm ca, de fiecare dată, *planșa reprezentînd figura din manual să fie prezentată imediat ce pe panoul trusei au fost deplasate piesele ce alcătuiesc reuniunea în conturul de jos de pe panoul 8 sau 11, deoarece în acest moment aspectul panoului nu mai permite observarea tehnicii de calcul.* Figura de pe planșă va reaminti etapele ce au fost realizate anterior pe panou și va conduce la deducerea regulii de calcul.

Pentru subtema 4° „Adunarea cu mai mulți termeni, cu trecere peste ordin" nu se află în manual o figură care să sugereze lucrul cu ajutorul trusei. Învățătorul va deduce singur aceasta, folosind panoul 11 numai după efectuarea exercițiului propus în manual, prin primele două procedee (folosind asociativitatea). Efectuarea prin procedeul (c) din manual va fi dedusă ca urmare a lucrului pe panoul 11.

Ca totdeuna la adunare, se va avea grijă a se parcurge etapele :

a) formarea pe panoul trusei a mulțimilor model pentru termeni, folosind piesele din trusă, astfel încît acestea să aibă structură numerică zecimală ;

b) formarea reuniunii, care pe panou se reduce la a arăta conturul care înconjoară liniile ce reprezintă mulțimile model pentru termeni. (Deocamdată piesele ce reprezintă reuniunea nu trebuie deplasate în conturul de jos de pe panou, ceea ce uneori nici nu ar fi posibil, dar mai ales nu ar avantaja deducerea regulilor de calcul.) ;

c) găsirea numărului de elemente al reuniunii, în care scop aceasta trebuie organizată cu structură numerică zecimală.

Forma în care se află reuniunea pe panoul trusei pune în evidență că aceasta este formată din :

— submulțimea unităților, care are atîtea unități cît este suma unităților din numerele termeni ;

— submulțimea zecilor, care are atîtea zeci cît este suma zecilor din numerele termeni ;

— submulțimea sutelor, care are atîtea sute cît este suma sutelor din numerele termeni.

Dacă nici una din aceste submulțimi nu ar avea mai mult de 9 unități de ordinul respectiv, reuniunea ar fi cu structură numerică zecimală, nerămînînd decît să numim și să scriem numărul ei de elemente.

Dacă vreuna din aceste submulțimi are mai mult de 9 unități de acel ordin, reuniunea nu are structură numerică zecimală, structură pe care trebuie să o realizăm noi. În acest scop, începînd de la dreapta la stînga înlocuim pe panou cîte 10 unități de un anumit ordin cu 1 unitate de ordin imediat mai mare, la submulțimile menționate care aveau mai mult de 9 unități.

Urmare acestor înlocuiri, reuniunea se obține cu structură numerică zecimală și se poate spune și scrie numărul ei de elemente. Cu ocazia înlocuirilor menționate (sau după ce au fost făcute) se deplasează piesele în conturul din partea de jos a panoului.

Recapitulînd etapele parcurse cu ajutorul planșelor ce redau figurile din manual, se deduc regulile de calcul.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 3-a

Exercițiul 4 (subtema 2°)

Pentru verificarea scrierilor respective, se notează cu cîte o literă fiecare parte a egalității, și se calculează ce număr reprezintă fiecare din cele două litere. Dacă ele reprezintă același număr, scrierea este corectă, dacă reprezintă numere diferite, scrierea este falsă.

De exemplu, pentru primul exercițiu de la (*a*) :

$n = 274 + 683$ $\qquad$ $p = 565 + 392$

$n = 957$ $\qquad$ $p = 957$

Avem $n = p$, deci scrierea $274 + 683 = 565 + 392$ este adevărată.

Pentru al doilea exercițiu de la (*b*) :

$n = 383 + 566$ $\qquad$ $p = 665 + 294$

$n = 949$ $\qquad$ $p = 959$

Avem $n \neq p$, deci scrierea $383 + 566 = 665 + 294$ este falsă.

Problema 6 (subtema 2°)

Dintr-o figură ca 81 rezultă rezolvarea prin operația

$$345 + 272 = \ .$$

Exercițiul 3 (subtema 4°)

Rezolvarea revine la a completa tabelul :

a	394	394	394	394	394	394
b	70	70	6	6	107	107
c	456	209	456	209	456	209
$a + b + c$			856			

Problema 6 (subtema 4°)

a) Cîte fete au fost în total în acea tabără ?

b) Cîți pionieri au fost în total în acea tabără ?

Problema 8 (subtema 4°)

a) Cîți trandafiri roșii s-au trimis spre vînzare ?

$$250 + 75 + 75 = 400$$

b) Cîți trandafiri s-au trimis spre vînzare în total ?

$$250 + 250 + 75 + 250 + 75 + 75 = 975$$

Notă : Întrebarea trebuie astfel pusă încît rezolvarea să folosească toate datele problemei.

TEMA A 4-A : SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 1 000

Scop : Deducerea procedeelor de calcul oral și în scris, pe baza definiției cu mulțimi a scăderii și a utilizării unor mulțimi model pentru descăzut și scăzător, organizate cu structură numerică zecimală. Cunoașterea transformării unei sute în zeci și a unei zeci în unități, în scopul creării posibilității de alegere din mulțimea model a descăzutului a unei submulțimi model pentru scăzător, avînd structură numerică zecimală.

Material didactic

Pentru învățător : Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 10). Planșe cu figurile 26, 27 și 28 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Activităţi pregătitoare

Se vor face mai întîi scăderi fără trecere peste ordin, cum ar fi 453 — 321 = , *reamintind regula de calcul : scădem unităţi din unităţi, zeci din zeci şi sute din sute.* Calculul se va face oral şi în scris, cu aşezarea numerelor unele sub altele :

$$\begin{array}{r} 453- \\ 321 \\ \hline 132 \end{array}$$

Se va cere elevilor să formeze pe panoul 10 al trusei, folosind piesele acesteia, mulţimea model pentru descăzutul 453, avînd structură numerică zecimală, să aleagă în ea o submulţime model pentru scăzătorul 321, tot cu structură numerică zecimală, şi să găsească mulţimea diferenţă dintre mulţimea model a descăzutului şi cea a scăzătorului. Aceasta este gata organizată ca structură numerică zecimală, aşa că se poate spune direct numărul ei de elemente, care este rezultatul scăderii.

În acest mod *se va aminti efectuarea scăderii fără trecere peste ordin, cu ajutorul trusei*, numai că în locul panoului 9 folosit anterior se va lucra pe panoul 10, aşa cum sugerează figura 82.

După împrospătarea acestor cunoştinţe şi deprinderi, se vor propune noile cazuri de scădere, eşalontae pe lecţii distincte, în ordinea din manual.

SUBTEMA 1° : SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ORDINUL UNITĂŢILOR

Propunînd scăderea 562 — 327 = elevii vor aşeza calculul scriind numerele unele sub altele şi *vor încerca efectuarea cu regula cunoscută : se scad unităţi din unităţi, zeci din zeci şi sute din sute.*

$$\begin{array}{r} 562- \\ 327 \\ \hline ? \end{array}$$

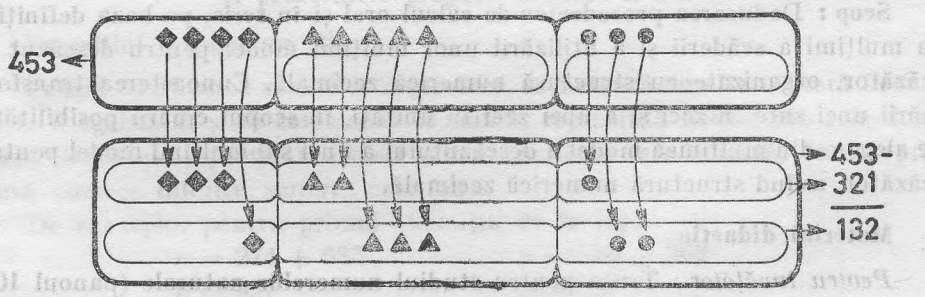


Fig. 82.

Elevii vor constata că regula cunoscută nu poate fi aplicată, neputînd scădea unităţile scăzătorului din unităţile descăzutului. Aşadar, trebuie găsită o regulă aplicabilă în această situaţie. În acest scop se apelează la definiţia scăderii cu ajutorul mulţimilor.

Se formează pe panoul 10 al trusei mulţimea model pentru descăzutul 562, organizată cu structură numerică zecimală, aşa cum arată în figura 83. În ea trebuie aleasă o submulţime model pentru scăzătorul 327 alegînd o submulţime cu 7 unităţi simple din mulţimea unităţilor, apoi una cu 2 zeci din mulţimea zecilor şi una cu 3 sute din mulţimea sutelor.

Se constată că din cele 2 unităţi existente în mulţimea unităţilor aflată în mulţimea model pentru descăzut, nu poate fi separată o submulţime cu 7 unităţi. Pentru a face posibil acest lucru se ia un triunghi reprezentînd o zece şi se înlocuieşte cu 10 discuri negre, reprezentînd 10 unităţi simple.

În urma acestei înlocuiri submulţimea unităţilor din mulţimea model pentru descăzut conţine 12 unităţi, grupate în alte două submulţimi, una cu 10 şi una cu 2 elemente, aşa cum arată figura 84.

Figura 85 arată cum se alege submulţimea model pentru scăzătorul 327 şi cum se formează mulţimea diferenţă dintre mulţimea model a descăzutului şi cea a scăzătorului. Aceasta din urmă are structură numerică zecimală şi se observă imediat numărul ei de elemente, 235, care este rezultatul scăderii. În urma deplasării pieselor pe panoul 10 aşa cum arată figura 85, panoul ia aspectul din figura 86.

Se prezintă planşa cu figura 26 din manual, cu ajutorul căreia se repetă etapele prin care s-a găsit rezultatul scăderii, deducîndu-se regula de calcul.

a) se scad cele 7 unităţi ale scăzătorului din cele 10 unităţi obţinute prin transformarea unei zeci luate din mulţimea zecilor aflate la descăzut. Restul obţinut, adunat cu cele 2 unităţi aflate la descăzut, formează numărul unităţilor diferenţei ;

b) se scad zecile scăzătorului din zecile rămase la descăzut (după luarea zecii care a fost transformată în unităţi) ;

c) se scad sutele scăzătorului din sutele descăzutului.

În baza lucrului pe panou sugerat de figura 85, modul cum gîndim efectuarea scăderii va fi scris :

$$\begin{aligned} 562 - 327 &= (500 + 50 + 10 + 2) - (300 + 20 + 7) \\ &= (500 - 300) + (50 - 20) + (10 - 7) + 2 \\ &= 200 + 30 + (3 + 2) \\ &= 235 \end{aligned}$$

Folosind aspectul aceluiaşi panou, şi scrierea aflată în partea dreaptă a panoului, calculul în scris va fi aşezat :

562^{10} −	562 −	562 −
327	327	327
235	235	235

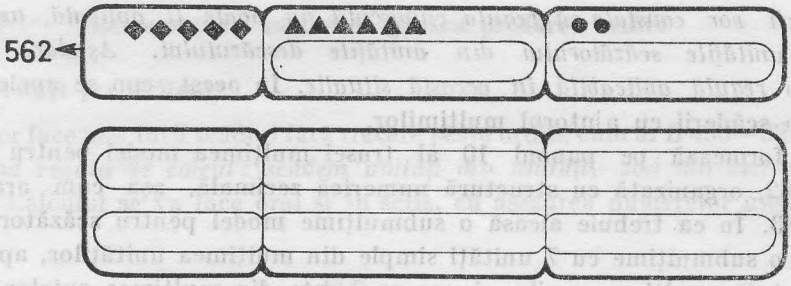


Fig. 83.

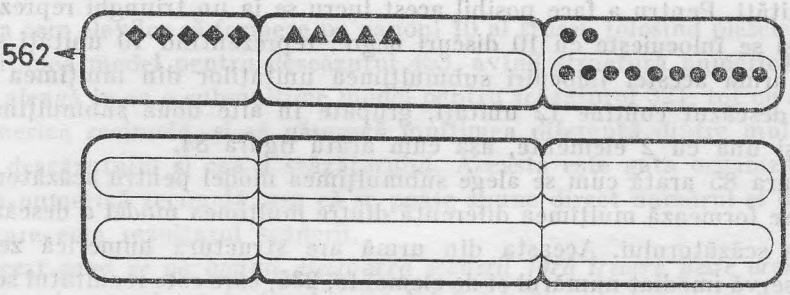


Fig. 84.

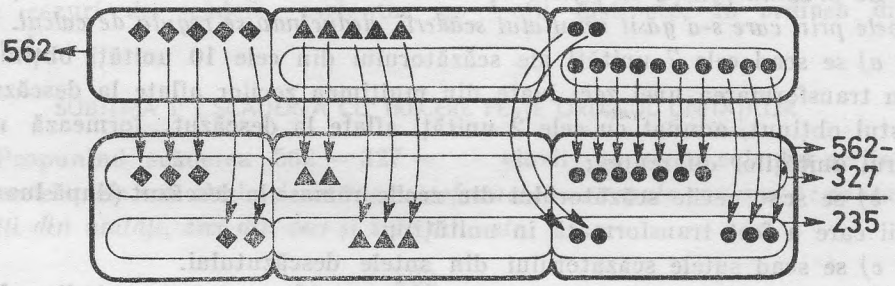


Fig. 85.

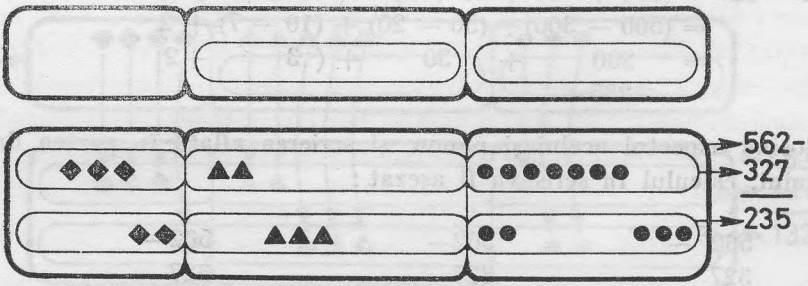


Fig. 86.

Prima scriere va fi folosită doar puțin timp după stabilirea regulii, pentru a o sugera mai limpede, apoi se va folosi a doua, care amintește doar prin punct transformarea unei zeci, și apoi se va folosi doar a treia scriere, după ce elevii au dobîndit deprinderea aplicării regulii.

Valorificînd aspectul panoului 10 redat în figura 86, se va face *proba scăderii prin adunare* (se vede că reunind mulțimile model pentru scăzător și diferența, se obține mulțimea model pentru descăzut). Același aspect ilustrează *proba scăderii prin scădere* (observînd că alegînd din mulțimea model pentru descăzutul 562 o submulțime cu 235 elemente, se obține o mulțime diferență cu 327 elemente). Așadar, dacă $562 - 327 = 235$, atunci $327 + 235 = 562$, $235 + 327 = 562$ și $562 - 235 = 327$.

Notă: Subtemele 2°, 3° și 4° se vor preda după o tehnologie didactică asemănătoare cu cea folosită pentru subtema 1°.

Etapele de efectuare a scăderii $632 - 247 =$ sînt sugerate pe figurile 87, 88, 89, 90 și 91.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 4-a

Problema 5 (subtema 1°)

O figură asemănătoare cu 80 conduce la operația :

$$860 - 169 =$$

Problema 6 (subtema 2°)

Prima rezolvare :

$465 + 375 = 840$	S-au adus 840 perechi încălțăminte.
$283 + 285 = 568$	S-au vîndut din ele 568 perechi.
$840 - 568 = 272$	Au rămas 272 perechi.

A doua rezolvare :

$465 - 283 = 182$	Au rămas 182 perechi de bascheți.
$375 - 285 = 90$	Au rămas 90 perechi de tenișI.
$182 + 90 = 272$	În total au rămas 272 perechi de încălțăminte.

Problema 4 (subtema 3°)

Notînd scăzătorul cu n, avem :

$832 - n = 548$, de unde $n = 832 - 548$, $n = 284$.

În situația a doua, avem :

$600 - n = 407$, de unde $n = 600 - 407$, $n = 193$.

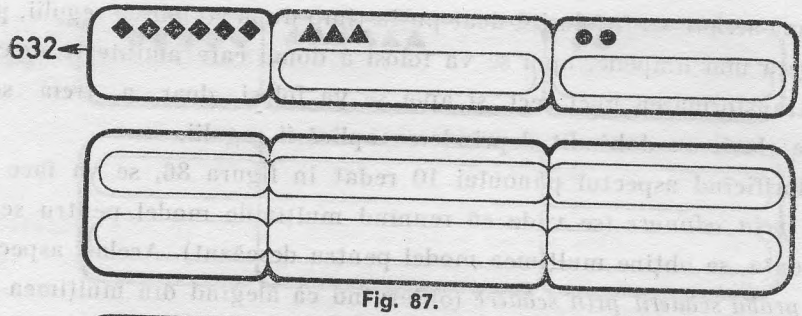


Fig. 87.

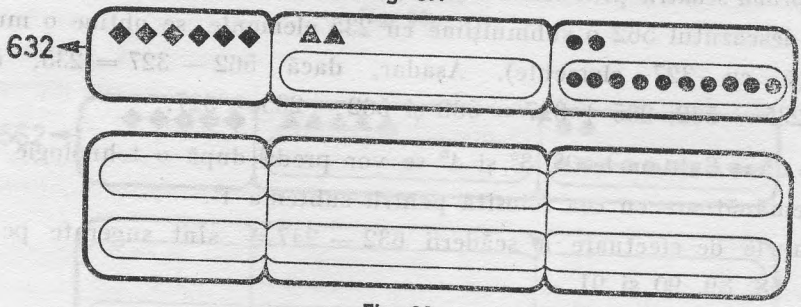


Fig. 88.

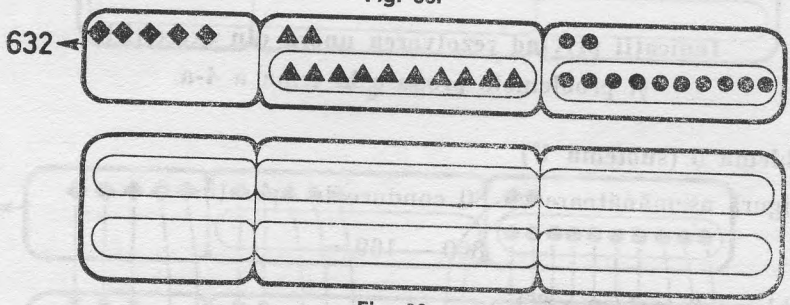


Fig. 89.

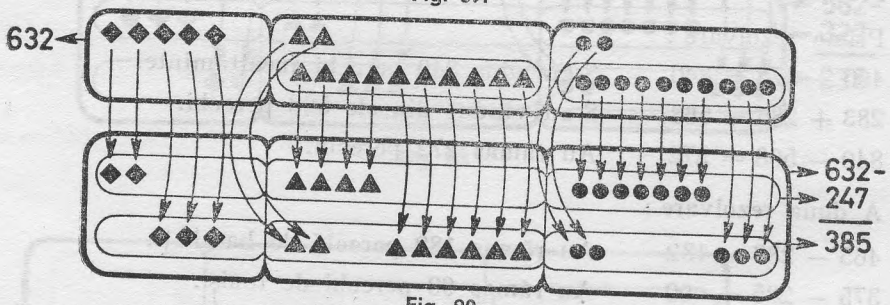


Fig. 90.

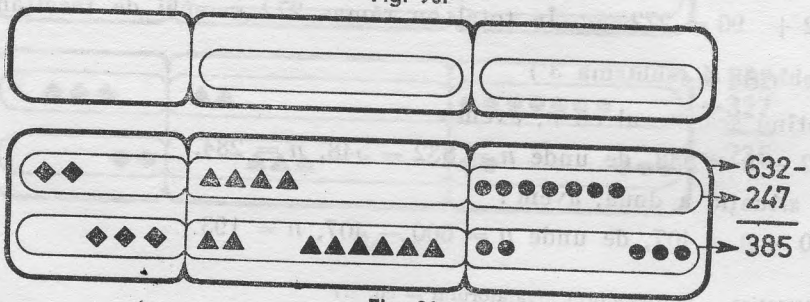


Fig. 91.

Problema 12 (subtema 3°)

Rîndul al 2-lea din tabel :

$a = 910 - 78$ $\qquad$ $a - b = 832 - 78$

$a = 832$ $\qquad$ $a - b = 754$

Rîndurile 3 și 4 se calculează asemănător.

Problema 13 (subtema 3°)

Prin încercări se găsește :

a) $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$; $\qquad$ *b)* $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$;

c) $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 5 ; 6\}$; $\qquad$ *d)* $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 6 ; 7\}$.

*e)** Căutăm mai întîi numerele naturale n care verifică

$$n - 389 > 108.$$

Avem $n - 389 = 108$ pentru $n = 108 + 389$, deci $n = 497$.

Așadar, $n - 389 > 108$ pentru $n > 497$, adică pentru n element al mulțimii $A = \{498 ; 499 ; 500 ; 501 ; \ldots\}$.

Căutăm acum numerele naturale n care verifică

$$n - 389 \leqslant 112.$$

Avem $n - 389 = 112$ pentru $n = 112 + 389$, deci $n = 501$.

Așadar, $n - 389 \leqslant 112$ pentru $n \leqslant 501$, adică pentru n element al mulțimii $B = \{501 ; 500 ; 499 ; 498 ; 497 ; \ldots\}$.

Scrierea $108 < n - 389 \leqslant 112$ va fi adevărată pentru acele numere n care împlinesc simultan condițiile $n > 497$ și $n \leqslant 501$, adică pentru numerele n ce aparțin mulțimii $C = \{498 ; 499 ; 500 ; 501\}$.

Observăm că mulțimea C este intersecția mulțimilor A și B.

Problema 18 (subtema 3°)

— 109 ; 988 ; 879.

Problema 19 (subtema 3°)

Să notăm cu E mulțimea copiilor care au prezentat desene la prima temă și cu F mulțimea copiilor care au prezentat desene la tema a doua. Din figura 92 deducem :

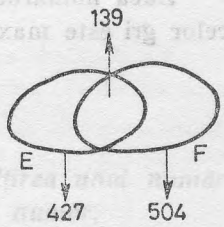


Fig. 92.

a) $427 - 139 = 288$, deci 288 de copii au prezentat desene numai la prima temă ;

* Acest exercițiu fiind mai dificil, va fi rezolvat cu elevii numai dacă nivelul general al clasei permite rezolvarea.

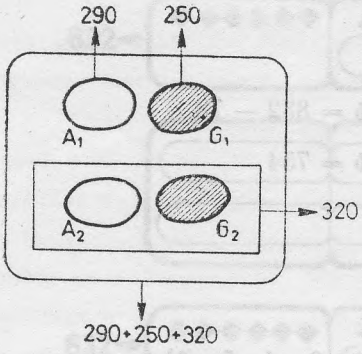


Fig. 93.

b) $504 - 139 = 365$, deci 365 de copii au prezentat desene numai la a doua temă;

c) $288 + 365 = 653$, deci 653 de copii au prezentat desene doar la o singură temă;

d) $288 + 139 + 365 = 792$, adică 792 de copii au prezentat desene cel puțin la una din teme (fie la prima, fie la a doua, fie la amîndouă).

Problema 20 (subtema 3°)

a) Numărul maxim al porumbeilor albi din stolul al doilea este 300, iar din reuniunea celor două stoluri este (fig. 93):

$$290 + 300 = 590$$

Numărul minim al porumbeilor albi din stolul al doilea este 20, iar reuniunea celor două stoluri este:

$$290 + 20 = 310$$

b) Fără a folosi rezultatele anterioare: observăm că în stolul al doilea pot fi cel mult 300 porumbei gri iar în reuniunea stolurilor pot fi cel mult:

$$250 + 300 = 550$$

În stolul al doilea sînt cel puțin 20 porumbei gri iar în reuniunea stolurilor sînt cel puțin:

$$250 + 20 = 270$$

Folosind rezultatele de la (a): În total în reuniunea stolurilor sînt:

$$290 + 250 + 320 = 860 \text{ porumbei.}$$

Dacă numărul celor albi este maxim, deci 590, atunci numărul celor gri este minim și egal cu:

$$860 - 590 = 270$$

Dacă numărul porumbeilor albi este minim, adică 310, atunci numărul celor gri este maxim și egal cu:

$$860 - 310 = 550$$