

Capitolul III

ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE, FĂRĂ ȘI CU TRECERE PESTE ORDIN, CÎND UN FACTOR NU TRECE DE 10

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMĂ ȘCOLARĂ

1. Înmulțirea cînd unul din factori este o sumă (distributivitatea înmulțirii față de adunare).

2. Înmulțirea cu mai mulți factori. Asociativitatea înmulțirii.

3. Înmulțirea cînd avem factor pe 10 sau 100.

4. Înmulțirea fără și cu trecere peste ordin, cînd unul din factori nu trece de 10, iar produsul este mai mic decît 1 000.

În predare, cazurile se vor grupa pe tipuri, după accesibilitate și algoritmul de calcul. Vor fi folosite parantezele pentru punerea în evidență a raționamentelor. Se va prezenta, pentru fiecare tip, și așezarea calculelor în scris. Se va folosi comutativitatea înmulțirii.

5. Exerciții și probleme simple (cu cel mult trei operații).

Aflarea unui număr „de atîtea ori mai mare” decît un număr dat.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Pentru a putea efectua în mod conștient înmulțirile în cazurile prevăzute de programă expusă mai sus, elevii trebuie să cunoască, pe baza unor exemple numerice :

a) Înmulțirea numerelor naturale cînd unul din factori este o sumă.
Exemple :

$$2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$$

și

$$(3 + 4) \times 2 = (3 \times 2) + (4 \times 2).$$

Se va observa că prima egalitate exemplifică înmulțirea unui număr cu o sumă, a doua exemplifică înmulțirea unei sume cu un număr.

Se va cunoaște scrierea generalizată a conținutului unor egalități numerice de tipul celor de mai sus :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

și

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

unde a , b și c sînt trei numere naturale, oarecare.

Proprietatea exprimată de aceste egalități va fi formulată: „înmulțirea este distributivă față de adunare“. Avînd în vedere dificultățile ce pot fi întîmpinate de către elevi pentru pronunțare, cuvintele „distributiv“ și mai ales „distributivitate“ vor fi folosite cu o frecvență cît mai redusă (la nevoie putînd fi complet evitate).

Se vor da și exemple în care sumele au trei termeni :

$$3 \times (2 + 4 + 1) = (3 \times 2) + (3 \times 4) + (3 \times 1)$$

$$(2 + 4 + 1) \times 3 = (2 \times 3) + (4 \times 3) + (1 \times 3)$$

b) Înmulțirea cu mai mulți factori, după regula exprimată prin scrierea :

$$2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4$$

sau, prin generalizare :

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c.$$

c) Proprietatea de asociativitate a înmulțirii numerelor naturale, exprimată prin egalitatea numerică :

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

sau, generalizat :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

unde a , b și c sînt trei numere naturale, oarecare.

Asociativitatea înmulțirii numerelor naturale face posibilă scrierea :

$$2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

sau, generalizat :

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

d) Înmulțirea unui număr scris cu o cifră, prin 10 și 100, și a unui număr scris cu două cifre, prin 10.

Cu ajutorul cunoștințelor de mai sus, combinate cu cele dobîndite anterior de elevi, aceștia vor putea înțelege deducerea regulilor de calcul în toate cazurile analizate în acest capitol :

1. Înmulțirea numerelor pînă la 10, cu un număr format numai din zeci.

2. Înmulțirea numerelor pînă la 10, cu un număr format din zeci și unități.

3. Înmulțirea numerelor mai mici decît 10, cu un număr format numai din sute.

4. Înmulțirea numerelor mai mici decît 10, cu un număr format din sute, zeci și unități.

Înmulțirile de tipurile menționate mai sus vor fi cunoscute atît în cazurile în care ele se fac fără trecere peste ordin, cît și în cazurile în care ele se fac cu trecere peste ordin.

Aflarea produsului se va face atît oral, cît și în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele. *Nu se va insista asupra calculului oral în cazurile greoaie, preferîndu-se folosirea timpului, în astfel de situații, pentru formarea unor deprinderi trainice de calcul în scris.*

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL III

(Număr de ore, orientativ = 20)

TEMA 1. ÎNMULȚIREA CÎND UN FACTOR ESTE O SUMĂ

Scop : Cunoașterea înmulțirii numerelor naturale cînd un factor este o sumă, fără a efectua în primul rînd suma respectivă, ca în exemplele :

$$\begin{array}{rcll} 3 \times (2 + 5) & = & (3 \times 2) + (3 \times 5) & \text{și} \quad (2 + 4) \times 3 = (2 \times 3) + (4 \times 3) \\ & = & 6 + 15 & = 6 + 12 \\ & = & 21 & = 18 \end{array}$$

Material didactic

Pentru învățător : Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 12).

Recomandări metodice pentru predarea temei

Textul din manual și indicațiile de mai jos vor permite învățătorului să-și elaboreze lecțiile cu ușurință.

Rezolvarea problemei de la „Exemplu“ urmărește deducerea celor două moduri de înmulțire a unui număr cu o sumă :

$$3 \times (2 + 5) =$$

a) Se face întîi adunarea și apoi înmulțirea :

$$3 \times (2 + 5) = 3 \times 7 = 21$$

b) Se înmulțește numărul, pe rînd, cu fiecare termen al adunării, apoi se adună produsele obținute :

$$\begin{array}{rcll} 3 \times (2 + 5) & = & (3 \times 2) + (3 \times 5) \\ & = & 6 + 15 \\ & = & 21 \end{array}$$

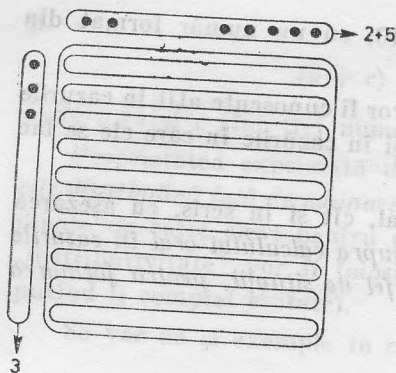


Fig. 94.

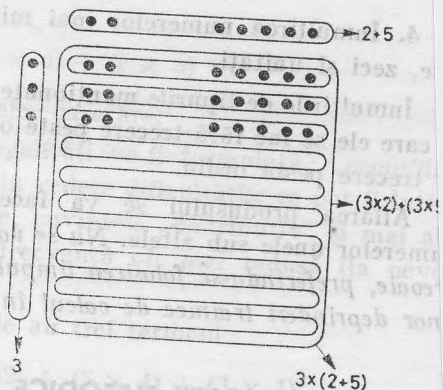


Fig. 95.

Atenția elevilor va fi reținută mai ales asupra acestui din urmă procedeu, care este întâlnit pentru prima dată și de care va fi nevoie în lecțiile următoare.

Al doilea mod de înmulțire a unui număr cu o sumă va fi dedus și independent de problema dată ca exemplu, utilizând panoul 12 din trusa pentru studiul numerelor naturale.

În acest scop, pe panoul 12 se formează mulțimi model pentru cei doi factori 3 și $2 + 5$, așa cum se vede în figura 94. Se reprezintă apoi prin puncte elementele mulțimii produs, așa cum arată figura 95. Se observă că mulțimea produs, care are $3 \times (2 + 5)$ elemente, este formată din reuniunea a două mulțimi disjuncte, una având 3×2 elemente și una având 3×5 elemente. Deci se poate scrie :

$$3 \times (2 + 5) = (3 \times 2) + (3 \times 5)$$

Conținutul dedus astfel din lucrul pe panoul 12 al trusei va fi intuit privind figura 29 din manual.

Rezolvarea problemei de la „Alt exemplu” urmărește deducerea celor două moduri de înmulțire a unei sume cu un număr :

$$(2 + 4) \times 3 =$$

a) Se face adunarea și apoi înmulțirea :

$$(2 + 4) \times 3 = 6 \times 3 = 18$$

b) Se înmulțește fiecare termen al adunării, pe rînd, cu numărul dat, apoi se adună produsele obținute :

$$\begin{aligned} (2 + 4) \times 3 &= (2 \times 3) + (4 \times 3) \\ &= 6 + 12 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Deși primul mod de lucru pare mai simplu, se va da atenție celui de al doilea mod, care va fi necesar în lecțiile următoare.

Deducerea celui de al doilea procedeu, folosind panoul 12 din trusa pentru studiul numerelor naturale, este sugerată de figura 30 din manual și se va face procedind asemănător cu cazul anterior.

Numai după ce se rezolvă un număr suficient de exerciții și probleme numerice care conduc la înmulțiri ce au unul din factori o sumă, se va face observația că oricare ar fi numerele naturale a , b , și c , putem scrie :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

și

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

Se va atrage atenția elevilor că aceste egalități reprezintă scrieri prescurtate a regulilor de înmulțire a unui număr cu o sumă, respectiv, a unei sume cu un număr, și că regulile respective se păstrează chiar dacă suma are mai mult de doi termeni.

Se vor efectua exerciții de felul :

$$2 \times (1 + 3 + 4) = (2 \times 1) + (2 \times 3) + (2 \times 4),$$

$$(1 + 3 + 4) \times 2 = (1 \times 2) + (3 \times 2) + (4 \times 2).$$

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema 1

Problema 2 (după „Exemplu“)

Primul mod : $2 + 8 = 10$

Un borcan cu smântină costă 10 lei;

$4 \times 10 = 40$

4 borcane cu smântină costă 40 lei

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$4 \times (2 + 8) = 4 \times 10 = 40$$

Răspuns : 40 lei.

Al doilea mod :

$4 \times 2 = 8$

4 borcane goale costă 8 lei;

$4 \times 8 = 32$

smântina din borcane costă 32 lei;

$8 + 32 = 40$

4 borcane pline cu smântină costă 40 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$(4 \times 2) + (4 \times 8) = 8 + 32 = 40$$

Răspuns : 40 lei.

Se constată că : $4 \times (2 + 8) = (4 \times 2) + (4 \times 8) = 40$

Observații

1. Scrierea textului aflat mai sus în dreapta fiecărei operații nu este obligatorie, el constituie *elemente ale unui plan de rezolvare*, care poate fi „oral“.

Rezolvarea, cu planul de rezolvare în scris, poate fi redactată și astfel:

Pentru prima rezolvare:

1. Costul unui borcan plin cu smântină

$$2 + 8 = 10$$

2. Costul a 4 borcane cu smântină

$$4 \times 10 = 40$$

Răspuns : 40 lei.

Pentru a doua rezolvare:

1. Costul a 4 borcane goale :

$$4 \times 2 = 8$$

2. Costul smântinei din 4 borcane :

$$4 \times 8 = 32$$

3. Costul a 4 borcane cu smântină :

$$8 + 32 = 40$$

Răspuns : 40 lei.

Desigur, după fiecare rezolvare se poate scrie și *formula numerică* de rezolvare :

$$4 \times (2 + 8) = 4 \times 10 = 40$$

$$\text{respectiv } (4 \times 2) + (4 \times 8) = 8 + 32 = 40$$

observînd că : $4 \times (2 + 8) = (4 \times 2) + (4 \times 8)$.

La fiecare problemă învățătorul va decide dacă este cazul să se scrie, sau nu, planul de rezolvare, precum și modalitatea de scriere, în funcție de condițiile concrete ale clasei. În orice caz, *nu se va face abuz de text în redactarea planului și nici numărul problemelor rezolvate cu plan scris, nu va fi prea mare.*

2. Clasificarea numerelor naturale în „abstracte“ (7; 5; 8; ...) și „concrete“ (7 kg; 5 lei; 8 mere; ...) trebuie evitată. În mulțimea numerelor naturale nu există elemente ca „7 kg“, „5 lei“ sau „8 mere“. Asemenea expresii au o utilitate de necontestat, dar nu sînt numere naturale. Ele sînt alcătuite din două părți distincte: prima este un număr natural (ca : 7; 5; 8; ...); a doua este numele (sau simbolul) unității de măsură a unei mărimi sau a elementelor unei mulțimi (kilograme; lei; mere; ...).

3. Rezolvarea problemelor cere efectuarea unor operații cu numerele date în problemă și cu numerele rezultate din astfel de operații, în cazul nostru operații cu *numere naturale*, singurele numere cunoscute pînă acum de elevi. Aceste operații trebuie să ne conducă de la datele problemei, la rezultatul ei.

Observînd că „7 kg” sau „5 mere” nu sînt numere naturale, scrierea „8 mere + 4 mere” nu este o adunare de numere naturale, r m n nd învăluită în mister, p n  la precizarea semnifica iei matematice a unor expresii ca „7 kg” sau „5 mere”.

 n consecin  , în scrierea „opera iilor” prin care se rezolvă o problemă este de preferat a nu specifica natura unităților reprezentate de numere, ob tin nd astfel numai operații cu numere naturale, cum ar fi:

$$8 + 4 = 12$$

care sînt bine cunoscute de elevi.

Dacă totu i se foloseste scrieri de felul:

$$8 \text{ mere} + 4 \text{ mere} = 12 \text{ mere}$$

sensul care li se poate da (deocamdată) este același cu al scrierii

$$8 + 4 = 12$$

adică sensul unei operații cu numere naturale, deci adăugarea unităților în scriere, nu modifică cu nimic sensul avut în absen a lor.

Evitarea scrierii unităților este recomand    i de alte considerente. Astfel, pentru rezolvarea problemei „dacă un borcan costă 3 lei, c t costă 4 borcoane identice?”, lu nd ca date „3 lei”  i „4 borcoane”, răspunsul se ob tine prin operația:

$$4 \text{ borcoane} \times 3 \text{ lei} = 12 \text{ lei}$$

efectuată între datele problemei.  n realitate, conform sensului avut de primul factor al înmulțirii, acela de a spune de c te ori trebuie luat ca termen al adunării al doilea factor, este vorba de a lua de 4 ori c te 3 lei, ceea ce s-ar scrie mai potrivit:

$$4 \times 3 \text{ lei} = 12 \text{ lei.}$$

Aceasta este însă o inconsecven  , deoarece la unele numere se specifică unitățile (3 lei), la altele nu (4  i nu „4 borcoane”).

Fie acum problema: „Un copil are 5 pere  i cu 2 mere mai multe dec t pere. C te mere are acel copil?”

Datele problemei fiind „5 pere”  i „2 mere”, rezolvarea va consta în efectuarea unor operații între aceste date, respectiv:

$$5 \text{ pere} + 2 \text{ mere} = 7 \text{ mere.}$$

ceea ce „nu merge”, este fără sens. Se pare că ar trebui să scriem:

$$5 \text{ mere} + 2 \text{ mere} = 7 \text{ mere}$$

dar în acest mod am introdus în operație „5 mere”, care nu se află printre datele problemei.

Renun  nd la scrierea unităților, rezolvările ultimelor două probleme se scriu cu ajutorul următoarelor operații cu numere naturale:

$$4 \times 3 = 12$$

Răspuns: 12 lei.

 i

$$5 + 2 = 7$$

Răspuns: 7 mere.

dispar  n  inconvenientele menționate mai sus.

Renun  rea la specificarea unităților în scrierea opera iilor nu exclude, ci obligă la găsirea naturii unităților numărului ob tinut ca rezultat.*

*  n acest scop se poate folosi conven ia de scriere: $4 \times 3 = 12$ (lei); $5 + 2 = 7$ (mere), în care natura unităților rezultatului este menționată în paranteză ca o informa ie suplimentară, fără ca paranteza să fie privită ca f c nd parte din „numărul” ob tinut la rezultat.

Problema 3 (după „Exemplu“)

Primul mod :

$$6 + 5 = 11$$

Lungimea și lățimea dreptunghiului au, împreună, 11 m ;

$$2 \times 11 = 22$$

perimetrul dreptunghiului are 22 m.

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$2 \times (6 + 5) = 2 \times 11 = 22$$

Răspuns : 22 m.

Al doilea mod :

$$2 \times 6 = 12$$

două lungimi, au, împreună, 12 m ;

$$2 \times 5 = 10$$

două lățimi, au, împreună, 10 m ;

$$12 + 10 = 22$$

perimetrul dreptunghiului este de 22 m.

Problema 2 (după „Alt exemplu“)

Primul mod :

$$3 + 7 = 10$$

Mama a cumpărat în total 10 kg cireșe ;

$$10 \times 5 = 50$$

10 kg cireșe a 5 lei khilogramul au costat 50 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$(3 + 7) \times 5 = 10 \times 5 = 50$$

Răspuns : 50 lei.

Al doilea mod :

$$3 \times 5 = 15$$

3 kg cireșe au costat 15 lei ;

$$7 \times 5 = 35$$

7 kg cireșe au costat 35 lei ;

$$15 + 35 = 50$$

toate cireșele au costat 50 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$(3 \times 5) + (7 \times 5) = 15 + 35 = 50$$

Răspuns : 50 lei.Se constată că : $(3 + 7) \times 5 = (3 \times 5) + (7 \times 5) = 50$ **Problema 3 (după „Alt Exemplu“)**

Primul mod :

$$5 + 4 = 9$$

Aneuța a cumpărat în total 9 caiete ;

$$9 \times 4 = 36$$

9 caiete a 4 lei bucata au costat 36 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$(5 + 4) \times 4 = 9 \times 4 = 36$$

Răspuns : 36 lei.

Al doilea mod :

$$5 \times 4 = 20 \quad 5 \text{ caiete au costat } 20 \text{ lei ;}$$

$$4 \times 4 = 16 \quad 4 \text{ caiete au costat } 16 \text{ lei ;}$$

$$20 + 16 = 36 \quad \text{toate caietele au costat } 36 \text{ lei.}$$

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$(5 \times 5) + (4 \times 4) = 20 + 16 = 36$$

Răspuns : 36 lei.

$$\text{Se constată : } (4 + 4) \times 4 = (5 \times 4) + (4 \times 4) = 36.$$

TEMA A 2-A : ÎNMULȚIREA CU MAI MULȚI FACTORI

Scop : Cunoașterea regulii de înmulțire a trei numere naturale :

$$5 \times 2 \times 3 = (5 \times 2) \times 3$$

și extinderea ei la patru numere naturale :

$$2 \times 4 \times 1 \times 7 = (2 \times 4) \times 1 \times 7 = (8 \times 1) \times 7$$

etc.

Nu se va insista asupra scrierii cu paranteze, ci asupra tehnicii de găsim a produsului înmulțind primul factor cu al doilea, rezultatul cu al treilea, ș.a.m.d.

Notă : Elaborarea lecțiilor nu poate crea dificultăți. Se va avea grijă ca exercițiile propuse să nu conducă la înmulțiri încă neînvățate.

TEMA A 3-A : ASOCIATIVITATEA ÎNMULȚIRII

Scop : Cunoașterea posibilității de efectuare a înmulțirii a trei numere naturale pe oricare din căile :

$$2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 ; \quad 2 \times 3 \times 4 = 2 \times (3 \times 4).$$

Prima cale este însăși definiția înmulțirii a trei numere naturale. A doua cale devine posibilă după ce dovedim că avem :

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

adică după ce este pusă în evidență proprietatea de asociativitate a înmulțirii numerelor naturale.

Material didactic

Pentru învățător : Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 12).

Rezolvînd problema dată ca exemplu în manual la tema respectivă se stabilește că avem :

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

de unde rezultă că la înmulțirea a trei factori putem înmulți primul factor cu al doilea și produsul obținut îl înmulțim cu al treilea factor, sau, înmulțim factorul al doilea cu al treilea, apoi înmulțim primul factor cu produsul obținut la înmulțirea anterioară.

Se atrage atenția elevilor că egalitatea

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

care exprimă *proprietatea de asociativitate a înmulțirii* poate fi dedusă independent de problema rezolvată, utilizînd panoul 12 din trusa pentru studiul numerelor naturale.

În acest scop pe panoul 12 formăm mulțimi model pentru factorul 2×3 , scris sub forma $3 + 3$, și pentru factorul 4, așa cum arată figura 96. Se reprezintă apoi elementele mulțimii produs, așa cum arată figura 97.

Să observăm că *mulțimea produs, care are $(2 \times 3) \times 4$ elemente, este formată din reuniunea a două mulțimi disjuncte, fiecare avînd 3×4 elemente.* Așadar, numărul elementelor reuniunii poate fi scris :

$$(3 \times 4) + (3 \times 4) = 2 \times (3 \times 4).$$

Avem numărul elementelor reuniunii scris în două moduri :

$$(2 \times 3) \times 4 \text{ și } 2 \times (3 \times 4).$$

Rezultă : $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

tocmai ce am dorit să arătăm.

Conținutul dedus mai sus cu ajutorul panoului trusei va fi intuit privind figura 31 din manual.

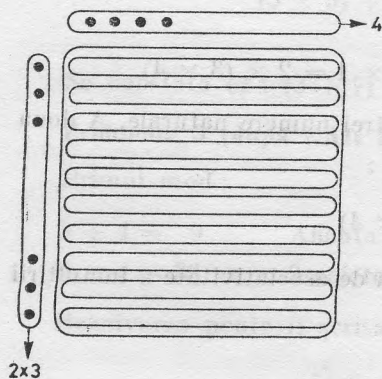


Fig. 96.

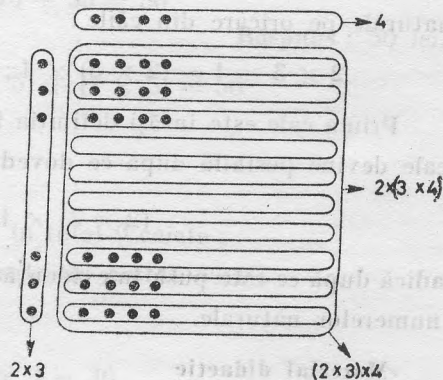


Fig. 97.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile

și problemele propuse la tema a 3-a

Problema 2

Prima rezolvare :

$$3 \times 2 = 6 \quad \text{s-au cumpărat în total 6 kg de fructe ;}$$

$$6 \times 5 = 30 \quad \text{Toate fructele au costat 30 lei.}$$

Rezolvarea se poate scrie :

$$(3 \times 2) \times 5 = 6 \times 5 = 30. \quad \mathbf{R : 30 \text{ lei.}}$$

A doua rezolvare :

$$2 \times 5 = 10 \quad \text{Fructele dintr-o pungă au costat 10 lei ;}$$

$$3 \times 10 = 30 \quad \text{Toate fructele au costat 30 lei.}$$

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$3 \times (2 \times 5) = 3 \times 10 = 30. \quad \mathbf{R : 30 \text{ lei.}}$$

Se constată că : $(3 \times 2) \times 5 = 3 \times (2 \times 5) = 30$.

Problema 3

Prima rezolvare :

$$2 \times 3 = 6 \quad \text{În 2 grupe de copii sînt 6 rînduri ;}$$

$$6 \times 3 = 18 \quad \text{În cele 6 rînduri sînt 18 copii.}$$

Rezolvarea se poate scrie :

$$(2 \times 3) \times 3 = 6 \times 3 = 18. \quad \mathbf{R : 18 \text{ copii.}}$$

A doua rezolvare :

$$3 \times 3 = 9 \quad \text{În 3 rînduri ale unei grupe sînt 9 copii ;}$$

$$2 \times 9 = 18 \quad \text{În cele 2 grupe sînt 18 copii.}$$

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$2 \times (3 \times 3) = 2 \times 9 = 18. \quad \mathbf{R : 18 \text{ copii.}}$$

Se constată : $(2 \times 3) \times 3 = 2 \times (3 \times 3) = 18$

TEMA A 4-A : ÎNMULȚIREA CÎND AVEM FACTOR PE 10 SAU 100

Scop : Deducerea regulilor de calcul și formarea deprinderii de aplicare a lor, pentru a putea fi folosite la efectuarea înmulțirilor în cazurile care vor fi analizate ulterior.

Recomandări metodice pentru predarea temei

În subtema (2°) „Înmulțirea cu 100 a numerelor pînă la 10“, punctul (b), se va sublinia că *proprietatea de asociativitate a înmulțirii face posibile scrierile :*

$$0 \times (10 \times 10) = (0 \times 10) \times 10 \quad \text{și} \quad 1 \times (10 \times 10) = (1 \times 10) \times 10$$

prin care înlocuim operațiile necunoscute încă, 0×100 și 1×100 , cu allele cunoscute, 0×10 și respectiv 1×10 și 10×10 .

De asemenea, la subtema (3°) „Înmulțirea cu 10 a numerelor formate numai din zeci“, se va sublinia că tot asociativitatea înmulțirii permite scrierea :

$$(4 \times 10) \times 10 = 4 \times (10 \times 10)$$

prin care înlocuim înmulțirea 40×10 , încă neînvățată, cu înmulțirile 10×10 și 4×100 , care sînt în acel moment cunoscute.

La subtema (4°) „Înmulțirea cu 10 a numerelor formate din zeci și unități“ se va atrage atenția că, *deoarece înmulțirea este distributivă față de adunare, putem scrie :*

$$(30 + 2) \times 10 = (30 \times 10) + (2 \times 10).$$

Astfel, înlocuim o înmulțire încă necunoscută, 32×10 , cu înmulțirile cunoscute în acel moment, 30×10 și 2×10 .

TEMA A 5-A : ÎNMULȚIREA FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN

Scop : Deducerea regulilor de calcul oral în situațiile noi analizate, folosind regulile de calcul deja cunoscute și proprietățile înmulțirii. Deducerea regulilor de efectuare în scris a calculelor respective, cu scrierea numerelor unele sub altele. Efectuarea expeditivă a calculelor, oral și în scris.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Elaborarea lecțiilor de către învățător pe baza textului din manual nu poate prezenta dificultăți, dacă se va ține seama și de indicațiile de mai jos :

La fiecare subtemă, punctul (a) intitulat „Operații ajutătoare“ este destinat deducerii regulii de calcul oral, prin reducerea situației noi, încă necunoscute, la altele deja învățate, cu ajutorul proprietăților cunoscute ale înmulțirii.

Astfel, asociativitatea înmulțirii permite la subtema (1°) să se afle produsul 2×30 , efectuînd înmulțirile deja cunoscute 2×3 și 6×10 , iar la subtema (3°) permite să se afle produsul 3×200 , efectuînd înmulțirile deja cunoscute 3×2 și 6×100 .

Asemănător, faptul că înmulțirea este distributivă față de adunare, permite la subtema (2°) să se afle produsul 3×21 efectuînd înmulțirile cunoscute 3×20 și 3×1 , iar la subtema (4°) permite să se afle produsul 3×213 , efectuînd înmulțirile cunoscute 3×200 , 3×10 și 3×3 .

Se observă că aici este nevoie a cunoaște înmulțirea unui număr cu o sumă de trei termeni, fapt asupra căruia trebuie atrasă atenția elevilor.

Odată „surprinsă“ regula de calcul oral prin scrierea aflată în manual în coloana din stînga (sub „Operații ajutătoare“), această regulă a fost scrisă prescurtat în coloana din dreapta, alăturată.

Scrierea din coloana stângă va fi făcută la tablă și în caiet numai cu ocazia primei deduceri a regulii. Ulterior, calculul produsului se va face oral, în baza regulii găsite, scriind „direct” rezultatul înmulțirii :

$$2 \times 30 = 60$$

La fiecare subtemă, punctul (b) intitulat „Calculul în scris” este destinat, așa cum spune și titlul, deducerii regulii de calcul în scris.

Această deducere se face folosind efectuarea înmulțirii prin adunare repetată, efectuarea în scris a adunării și efectuarea adunării repetate prin înmulțire.

Să luăm ca exemplu $2 \times 30 =$.

Reproducem textul din manual :

Deducerea regulii :

$$\begin{array}{rcl}
 2 \times 30 & = & 30 + 30 \\
 & = & 60
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 30 \\
 \times 2 \\
 \hline
 60
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Așezarea convenabilă a calculului :} \\
 \begin{array}{r}
 30 \times \\
 2 \\
 \hline
 60
 \end{array}
 \end{array}$$

Avem : $2 \times 30 = 60$.

Din textul reprodus se vede că sînt parcurse mai multe etape :

a) Se calculează produsul 2×30 scriind înmulțirea ca adunare repetată și efectuînd această adunare după procedeul obișnuit la adunarea în scris.

b) Se observă că adunarea unităților de același ordin scrise într-o coloană este de fapt o adunare repetată, deci poate fi efectuată prin înmulțire, așa cum s-a și notat deasupra fiecărei coloane.

c) Înlocuind adunarea pe coloane cu înmulțirile 2×0 și 2×3 , acestea dau cifrele produsului. Pentru efectuarea lor este mai convenabilă scrierea :

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 30 \times \\ 2 \end{array} & \text{cu sensul} & \begin{array}{r} 30 \times \\ 2 \end{array} & \text{care dă} & \begin{array}{r} 30 \times \\ 2 \end{array} \\
 \hline & & \begin{array}{r} 60 \\ \times 2 \\ \hline 120 \end{array} & & \begin{array}{r} 60 \end{array}
 \end{array}$$

Observăm că această scriere păstrează semnificația factorilor avută în 2×30 de : 2 ori 30. În adevăr, în exprimarea obișnuită, efectuînd înmulțirea cu numerele scrise unele sub altele, zicem „de 2 ori 0” și „de 2 ori 3 (zeci)”, 2 păstrînd sensul de a spune de cîte ori se repetă celălalt factor ca termen al adunării.

Elevii vor folosi doar prima scriere, și a treia.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 5-a

Problema 5 (subtema 2°)

Primul mod :

$$21 + 12 = 33 \quad \text{Un stilou și un pix costă 33 lei ;}$$

$$3 \times 33 = 99 \quad 3 \text{ stilouri și 3 pixuri costă 99 lei.}$$

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$3 \times (21 + 12) = 3 \times 33 = 99$$

R : 99 lei.

Al doilea mod :

$$3 \times 21 = 63 \quad 3 \text{ stilouri costă 63 lei ;}$$

$$3 \times 12 = 36 \quad 3 \text{ pixuri costă 36 lei ;}$$

$$63 + 36 = 99 \quad 3 \text{ stilouri și 3 pixuri costă 99 lei.}$$

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$(3 \times 21) + (3 \times 12) = 63 + 36 = 99.$$

R : 99 lei.

$$\text{Se va observa : } 3 \times (21 + 12) = (3 \times 21) + (3 \times 12) = 99.$$

Problema 6 (subtema 3°)

Prin încercări, găsim :

$$a) n = 4 ; \quad b) \{0 ; 1 ; 2 ; 3\} ; \quad c) \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}.$$

Problema 7 (subtema 3°)

$$\text{Prin încercări, găsim : } B = \{2 ; 3 ; 4\}.$$

Problema 8 (subtema 4°)

Prima rezolvare :

$$1^\circ. \text{ Cît costă o rochie și un pulover ?} \quad 1) \quad 231 + \quad 2) \quad 443 \times$$

$$231 + 212 = 443$$

$$\frac{212}{443}$$

$$\frac{2}{886}$$

$$2^\circ. \text{ Costul a 2 rochii și 2 pulovere :}$$

$$2 \times 443 = 886$$

Răspuns : 886 lei.

Rezolvarea se poate scrie :

$$2 \times (231 + 212) = 2 \times 443 = 886.$$

A doua rezolvare :

$$1^\circ. \text{ Aflăm cît costă 2 rochii :} \quad 1) \quad 231 \times \quad 2) \quad 212 \times$$

$$2 \times 231 = 462$$

$$\frac{2}{462}$$

$$\frac{2}{424}$$

2°. Aflăm cit costă 2 pulovere :

$$2 \times 212 = 424$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad 462 + \\ \quad 424 \\ \hline \quad 886 \end{array}$$

3°. Costul a 2 rochii și 2 pulovere :

$$462 + 424 = 886$$

Răspuns : 886 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă :

$$(2 \times 231) + (2 \times 212) = 462 + 424 = 886.$$

Problema 9 (subtema 4°)

Prima rezolvare :

$$3 \times 101 = 303$$

Lungimea este de 303 dam ;

$$101 + 303 = 404$$

lungimea și lățimea au, împreună, 404 dam ;

$$2 \times 404 = 808$$

perimetrul dreptunghiului este de 808 dam.

A doua rezolvare :

$$3 \times 101 = 303$$

Lungimea are 303 dam ;

$$2 \times 101 = 202$$

cele 2 lățimi au, împreună, 202 dam ;

$$2 \times 303 = 606$$

cele 2 lungimi au, împreună, 606 dam ;

$$202 + 606 = 808$$

perimetrul dreptunghiului este de 808 dam.

TEMA A 6-A : ÎNMULȚIREA CU TRECERE PESTE ORDIN

Scop : Deducerea regulilor de calcul oral și în scris. Formarea deprinderilor de calcul și de aplicare a cunoștințelor în rezolvarea problemelor.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Lecțiile se vor desfășura după o tehnologie didactică asemănătoare celei folosite la tema a 5-a.

Subliniem în continuare unele aspecte mai importante :

SUBTEMA 1°

La punctul (a) „Operații ajutătoare” se va atrage atenția elevilor că folosirea asociativității înmulțirii face posibilă trecerea în calcularea produsului 4×30 , de la etapa : $4 \times (3 \times 10)$

la etapa :

$$(4 \times 3) \times 10$$

și prin aceasta, în fond, se înlocuiește înmulțirea necunoscută încă, 4×30 , cu înmulțirile cunoscute 4×3 și 12×10 .

La punctul (b) „Calculul în scris“, vor fi evidențiate etapele :

a) Scrierea înmulțirii folosind adunarea repetată :

$$4 \times 30 = 30 + 30 + 30 + 30$$

și efectuarea adunării obținute folosind regula de calcul în scris :

$$\begin{array}{r} 30 + \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ \hline 120 \end{array}$$

b) Observarea faptului că, adunînd „pe coloane“, la fiecare coloană facem o adunare repetată : $0 + 0 + 0 + 0$; $3 + 3 + 3 + 3$. Acestea pot fi scrise :

$$0 + 0 + 0 + 0 = 4 \times 0 ; \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3.$$

Înmulțirile respective dau unitățile, zecile și sutele produsului. Pentru sugerare, ele vor fi scrise (numai în primele exemple prezentate) deasupra fiecărei coloane :

$$\begin{array}{r} 0 \times 4 \\ 3 \times 4 \\ 30 + \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ \hline 120 \end{array}$$

c) Înlocuirea adunărilor pe coloane cu înmulțiri face mai convenabilă așezarea calculului :

$$\begin{array}{r} 30 \times \quad \text{cu sensul} \quad 30 \times \quad \text{care dă} \quad 30 \times \\ \underline{4} \quad \quad \quad \underline{4} \quad \quad \quad \underline{4} \\ 120 \end{array}$$

(Elevii nu vor folosi decît prima scriere, care se va completa transformîndu-se în cea de a treia).

Se va observa că, deși pentru prescurtare zicem „4 ori 0 egal 0“ și „4 ori 3 egal 12“, în realitate avem în vedere : 4×3 zeci = 12 zeci = 10 zeci + 2 zeci = 1 sută + 2 zeci.

Așadar, trebuie să scriem la produs fiecare cifră pe locul corespunzător ordinului unităților pe care le reprezintă.

SUBTEMA 2^o

La punctul (a) „Operații ajutătoare“, se va sublinia că, întrucît înmulțirea este distributivă față de adunare, putem trece în calcularea produsului 3×47 de la etapa :

$$3 \times (40 + 7)$$

la etapa : $(3 \times 40) + (3 \times 7)$

înlocuind astfel înmulțirea necunoscută încă, 3×47 , cu înmulțirile cunoscute 3×40 și 3×7 . Această observație dă regula de calcul oral :

$$3 \times 47 = (3 \times 40) + (3 \times 7) = 120 + 21$$

care va fi folosită pentru scrierea „directă“ a produsului înmulțirilor de acest fel :

$$3 \times 47 = 141$$

La punctul (b) „Calculul în scris“, vor fi evidențiate aceleași etape ca la subtema (1^o).

În legătură cu efectuarea adunării repetate :

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \\ 47 + \\ 47 \\ 47 \\ \hline 141 \end{array}$$

se va observa că suma unităților se poate calcula :

$$3 \times 7 = 21 = 2 \text{ zeci} + 1$$

cele 2 zeci urmînd a fi adunate la suma zecilor, lucru sugerat prin scrierea lui 2 deasupra coloanei zecilor.

Suma zecilor se poate calcula :

$$\begin{aligned} 3 \times 4 \text{ zeci} + 2 \text{ zeci} &= 12 \text{ zeci} + 2 \text{ zeci} \\ &= 14 \text{ zeci} \\ &= 1 \text{ sută} + 4 \text{ zeci.} \end{aligned}$$

În acest mod obținem pentru produs cifra unităților 1, a zecilor 4 și a sutelor 1.

Toate acestea se pot „gîndi“ pe scrierea simplificată :

$$\begin{array}{r} 47 \times \\ 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{cu sensul} \quad \begin{array}{r} 47 \times \\ 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{care dă} \quad \begin{array}{r} \textcircled{2} \\ 47 \times \\ 3 \\ \hline 141 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{r} 47 \times \\ 3 \\ \hline 141 \end{array}$$

SUBTEMA 3^a

Se folosește sistemul de lucru expus anterior. De data aceasta trebuie folosit faptul că înmulțirea este distributivă față de o adunare cu trei termeni, pentru a înlocui înmulțirea necunoscută încă 4×248 , cu înmulțirile cunoscute 4×200 , 4×40 și 4×8 .

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 6-a

Problema 6 (subtema 1^o)

Înlocuind, pe rând, elementele reuniunii în locul lui n din :

$$6 \times n \leq 300$$

se găsește că scrierea este adevărată pentru orice element al mulțimii :

$$A = \{20 ; 30 ; 50\}.$$

Înlocuind apoi, pe rând, elementele reuniunii în locul lui n din :

$$6 \times n \geq 300$$

se găsește scrierea adevărată pentru orice element al mulțimii :

$$B = \{50 ; 70 ; 80 ; 90\}.$$

Problema 7 (subtema 1^o)

$$a) 40 \times 7 = 288 ; b) 20 \times 8 = 160 ; c) 30 \times 9 = 270$$

$$60 \times 7 = 420$$

$$10 \times 8 = 80$$

$$90 \times 9 = 810$$

$$70 \times 8 = 560$$

$$80 \times 9 = 720$$

$$50 \times 9 = 450$$

$$d) 40 \times 5 = 200$$

$$60 \times 5 = 300$$

$$20 \times 5 = 100$$

$$10 \times 5 = 50$$

$$70 \times 5 = 350$$

$$30 \times 5 = 150$$

$$90 \times 5 = 450$$

$$80 \times 5 = 400$$

$$50 \times 5 = 250$$

Problema 6 (subtema 2^o)

1°. Aflăm câți lei a dat :

$$(8 \times 25) + (6 \times 50) + (26 \times 10) = 200 + 300 + 260 = 760.$$

2°. Ce rest trebuie să primească :

$$760 - 755 = 5$$

A primit rest 5 lei. Această sumă i se poate restitui în următoarele moduri :

- a) 1 bancnotă de 5 lei ;
- b) 1 monedă de 5 lei ;
- c) 1 monedă de 3 lei și 2 monede de 1 leu ;
- d) 5 monede de 1 leu.

Problema 12 (subtema 3°, ca și problemele următoare)

Prin încercări, găsim :

- a) $\{2; 3; 4\}$; b) $\{2; 3; 4; 5\}$; c) $\{3; 4; 5; 6\}$;
- d) $\{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Problema 14

$$(6 \times 18) + (6 \times 11) = \text{ sau } 6 \times (18 + 11) =$$

care se efectuează.

Problema 15

$$(6 \times 13) + (6 \times 10) + (6 \times 7) = \text{ sau } 6 \times (13 + 10 + 7) =$$

și se fac operațiile respective.

Problema 16

$$(175 + 59) \times 4 = 234 \times 4 = 936 \quad \text{ sau } (175 \times 4) + (59 \times 4) = \\ = 700 + 236 = 936$$

Pe toate cărțile s-a plătit 936 lei.

Problema 17

„O carte costă 3 lei. Se cumpără o dată 121 și altă dată 32 cărți de acest fel. Cît s-a plătit în total ?”

Oricare din cele două scrieri date în manual reprezintă o rezolvare a problemei. Efectuînd operațiile se găsește :

$$(121 \times 3) + (32 \times 3) = 363 + 96 = 459$$

$$\begin{array}{r} 363 + \\ 96 \\ \hline 459 \end{array}$$

sau : $(121 + 32) \times 3 = 153 \times 3 = 459$

$$\begin{array}{r} 153 \times \\ 3 \\ \hline 459 \end{array}$$

Problema 18

$$3 \times (215 + 113) = 3 \times 328 = 984$$

$$\begin{array}{r} 215 + \quad 328 \times \\ 113 \quad 3 \\ \hline 328 \quad 984 \end{array}$$

sau : $(3 \times 215) + (3 \times 113) = 645 + 339 = 984$

$$\begin{array}{r} 215 \times \quad 113 \times \quad 645 + \\ 3 \quad 3 \quad 339 \\ \hline 645 \quad 339 \quad 984 \end{array}$$

Pe 3 costume fustă-taior s-au plătit 984 lei.

Observație. Problemele de la 14 la 18 vor fi rezolvate mai întâi folosind planul scris de rezolvare, făcut în mod obișnuit, pentru fiecare problemă dându-se două rezolvări. După fiecare rezolvare se va scrie soluția condensată, sub una din formele date mai sus, corespunzătoare situației respective.

Problema 19

„O cămașă costă 112 lei și o cravată costă 49 lei. Cît se va plăti pe 5 cămăși și 5 cravate?”

Oricare din cele două scrieri date în manual reprezintă o rezolvare a problemei. Efectuînd operațiile se găsește :

$$(5 \times 112) + (5 \times 49) = 560 + 245 = 805$$

112 ×	49 ×	560 +
5	5	245
560	245	805

sau : $5 \times (112 + 49) = 5 \times 161 = 805$

112 +	161 ×
49	5
161	805

Capitolul IV

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE FĂRĂ ȘI CU TRECERE PESTE ORDIN, CÎND ÎMPĂRȚITORUL NU TRECE DE 10

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMĂ ȘCOLARĂ

1. Folosind definiția împărțirii cu ajutorul separării dintr-o mulțime a unor submulțimi disjuncte două câte două, fiecare avînd același număr de elemente, se va introduce împărțirea cu rest a numerelor naturale. Relațiile: $0 \leq r < i$; $d = (i \times c) + r$. Proba împărțirii. Împărțirea cu rest prezentată prin scădere repetată.

2. Împărțirea fără și cu trecere peste ordin, cînd împărțitorul nu trece de 10, grupînd pe tipuri cazurile ce pot fi întîlnite, după accesibilitate și algoritmul de calcul. Vor fi folosite parantezele pentru punerea în evidență a raționamentelor. Pentru fiecare tip se va prezenta și așezarea calculului în scris.

3. Exerciții și probleme simple. Problemele de aflare a unui număr „de atîtea ori mai mic” decît un număr dat.

Exerciții de tipul: $5 \cdot n = 970$; $n : 3 = 231$; $500 : n = 4$.

Probele unora din împărțirile și înmulțirile făcute.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Împărțirea cu rest a numerelor naturale, prin procedeele cunoscute de separare a unei mulțimi în submulțimi disjuncte două câte două, fiecare avînd același număr de elemente:

a) procedeul prin cuprindere, dacă știm cîte elemente trebuie să fie într-o submulțime;

b) procedeul prin părți egale, dacă știm cîte submulțimi trebuie formate.

Elevii vor cunoaște faptul că împărțirea cu rest a numerelor naturale, deși notată cu „:” ca și împărțirea exactă, este o operație distinctă de aceasta din urmă. În adevăr,

$$14 : 3 =$$

este o operație imposibilă dacă este privită ca împărțire exactă și este o operație posibilă dacă este privită ca împărțire cu rest:

$$14 : 3 = 4 \text{ (rest 2)}$$

Împărțirea cu rest nu exclude obținerea restului 0, situație în care ea coincide cu împărțirea exactă. Dacă restul este diferit de 0, împărțirea se numește neexactă.

Așadar, împărțirea exactă și împărțirea neexactă sînt cazuri particulare ale împărțirii cu rest.

În mod nejustificat se consideră cîteodată împărțirea neexactă ca fiind identică cu împărțirea cu rest. În acest mod se pierde din vedere că dacă se obține restul 0, acest rest este un număr natural ca oricare altul, și deci împărțire „cu rest” nu înseamnă neapărat împărțire „neexactă”.

Privind împărțirea exactă și împărțirea cu rest ca pe două operații distincte este normal să folosim și simboluri de operație distincte. Coincidența simbolurilor poate genera confuzii. Aceste confuzii se vor agrava mai tîrziu, cînd se vor introduce numerele raționale (mulțimea lor se notează cu Q), pentru împărțirea cărora se folosește tot simbolul „:”.

Astfel vom avea:

$$14 : 3 = \begin{cases} \text{fără sens, dacă „:” este împărțirea exactă în } N; \\ 4, \text{ dacă „:” este împărțirea cu rest în } N; \\ \frac{14}{3} \text{ — dacă „:” este împărțirea în } Q \text{ și s-a admis: } 14 = \frac{14}{1}; 3 = \frac{3}{1}. \end{cases}$$

Ce sens vom da atunci scrierii $14 : 3$, în cazul în care nu ni se fac alte precizări? În mod normal, ar trebui să luăm în considerație, pe rînd, toate cele trei sensuri posibile, ceea ce devine complicat.

Ieșirea din impas ar oferi-o folosirea de simboluri diferite pentru operații diferite, de exemplu „ $\circ$ ” pentru împărțirea exactă în N , „ $*$ ” pentru împărțirea cu rest în N și „ $:$ ” pentru împărțirea în Q . Cu aceste notații:

$$14 \circ 3 = \text{fără sens}; 14 * 3 = 4; 14 : 3 = \frac{14}{3}.$$

Introducerea unor noi simboluri întîmpină însă o serioasă opoziție sub motiv că s-ar complica mult scrierea (este și greu de schimbat o îndelungată obișnuință). În această situație, respectînd tradiția notației unice cu „:”, facem convenția ca, dacă nu se fac alte precizări, scrierea :

$$14 : 3$$

să fie considerată ca avînd sensul din mulțimea cea mai cuprinzătoare, adică din Q :

$$14 : 3 = \frac{14}{3}$$

Dacă știm că scrierea :

$$14 : 3$$

este în mulțimea N a numerelor naturale, ea va avea sensul operației mai cuprinzătoare, deci a împărțirii cu rest ;

$$14 : 3 = 4$$

în toate cazurile în care nu se spune în mod expres că este vorba de o împărțire exactă, sau contextul nu obligă a considera o astfel de împărțire.

Uneori se susține cu destulă insistență că nu este bine a complica lucrurile pentru copiii mici, separînd împărțirea „exactă”, de aceea „cu rest”. Ce altele împărțiri? Să se vorbească de o singură împărțire, și gata.

Sugestia nu este rea, dacă lucrul ar fi posibil. Cum *tendința de simplificare a studiului împărțirii numerelor naturale nu este nouă, să vedem ce s-a realizat pînă în prezent.*

În mod neîndoiește, împărțiri de felul:

$$\begin{array}{r} 56 : 2 = 28 \quad \text{și} \quad 59 : 3 = 19 \\ \begin{array}{r} 4 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 29 \\ 27 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

se studiau în școala primară înainte ca elevii să cunoască alte numere decît cele naturale. Era deci vorba de împărțirea exactă și împărțirea cu rest a numerelor naturale.

Este adevărat că nu se prezentau ca operații distincte una de alta, ci ca o singură operație, care se dorea a fi aceea mai generală, deci aceea cu rest. Dar la fel de adevărat este că singura definiție ce se da împărțirii numerelor naturale era, în esență, „operația în care, dîndu-se produsul a două numere și unul din ele, se află celălalt număr”. Ori, aceasta privea, în realitate, doar împărțirea exactă.

(Cu o astfel de definiție scrierea $59 : 3 =$ este o împărțire imposibilă, neputînd găsi un număr natural care înmulțit cu 3 să dea produsul 59. Mai exact, scrierea $59 : 3$ nu are sens matematic, cîtă vreme folosim pentru împărțirea numerelor naturale definiția de mai sus, și „efectuarea” împărțirii $59 : 3 = 19$ făcută mai sus este o farsă).

În acest mod devine evident că se spunea „împărțire” în loc de „împărțire cu rest”, ceea ce nu era rău, aceasta conținînd-o pe cea exactă ca pe un caz particular. Ca definiție a „împărțirii” respective se lua însă definiția împărțirii „exacte”, ceea ce era greșit, deoarece nu cuprîndea împărțirea „neexactă” inclusă în împărțirea „cu rest”.

Care „împărțire” se efectua în practică? Acea cu rest, adică tocmai aceea care nu fusese definită. Ea intra astfel în mod clandestin în matematică și apoi era folosită ca ceva bine cunoscut de toți. (Chiar la efectuarea împărțirii exacte se folosește pe etapele intermediare, și împărțirea cu rest, cum se poate ușor constata mai sus la împărțirea $56 : 2$).

Se desprinde necesitatea definirii corecte a împărțirii cu rest a numerelor naturale, în orice manual școlar care folosește această operație.

Să precizăm acum cîteva noțiuni, așa cum sînt ele în matematica actuală.

O regulă „*” care ne conduce de la elementele a și b din mulțimea E , luate în această ordine, la cel mult un element c din E (sau la niciunul) definește o operație (internă binară) în mulțimea E .

Se notează:

$a * b = c$ (citind „a operat prin „*” cu b este egal cu c ”).

În scrierea $a * b$ simbolul $*$ are o dublă semnificație.

Prima este aceea de „operator”, regula $*$ indicînd clar procedeul prin care plecînd de la elementele a și b din E , luate în această ordine, se ajunge la c din E .

A doua este aceea de a „unifica” scrierea $a * b$ într-un ansamblu de simboluri cu care se poate nota elementul c din E :

$$a * b = c.$$

În adevăr, folosind rolul de operator al lui „*” putem ajunge de la cuplul (a, b) la c . Așadar, dacă ni se dă scrierea $a * b$, ni se dă de fapt și cuplul (a, b) și regula „*”, deci ni se dă în fond c (chiar dacă indirect).

Din cele de mai sus rezultă că, indiferent cum este formulată, din definiția oricărei operații (interne binare) nu trebuie să lipsească :

a) Precizarea fără echivoc a mulțimii E în care se face operația respectivă.

b) Conținutul concis dar clar al regulii de operație *, astfel încât, pe baza ei, să putem ajunge de la elementele a și b din E , la elementul c din E , rezultatul operației * efectuate între a și b .

Să revenim acum asupra definiției împărțirii sub forma „operația în care se dă produsul, și unul din factori și trebuie aflat celălalt factor“.

Se spune, de exemplu :

$$15 : 3 = 5 \text{ deoarece } 5 \times 3 = 15.$$

Dar, cum s-a găsit citul 5? Definiția nu indică, așa cum ar trebui, procedeul prin care plecând de la deîmpărțitul 15 și de la împărțitorul 3, sîntem conduși la citul 5. Ea oferă doar un mijloc de verificare dacă citul, aflat nu se știe pe ce cale, este corect sau nu.

Așadar, definiția menționată nu conferă operatorului „:“ conținutul necesar pentru a furniza rezultatul operației, ea nu permite „efectuarea“ operației, ci doar „proba“ ei. Este clar că, de fapt, nu avem de a face cu o definiție, ci cu o proprietate a împărțirii exacte, proprietate care ar trebui formulată „la orice împărțire exactă produsul citului prin împărțitor este deîmpărțitul“ și dedusă dintr-o definiție care să permită efectuarea operației respective, definiție care nu a existat pînă acum în manualele școlare.

Situația este identică cu aceea întâlnită la scădere, care era „definită“ ca „operația în care se dă suma a două numere, și unul din numere, și trebuie aflat celălalt număr“. Această formulare oferă posibilitatea de verificare a rezultatului scăderii, dar nu și a efectuării ei, fiind cu totul necunoscută calea pe care, pornind de la descăzut și scăzător, s-ar putea ajunge la diferență. Se impunea, deci, o definiție care să permită efectuarea scăderii.

Din cele de mai sus rezultă că este necesar a prezenta cunoștințele cit mai simplu, fără ca din dorința simplificării să amestecăm în așa măsură lucruri distincte, încît, ele să rămînă pentru totdeauna confuze în mintea elevilor. Prin aceasta le creăm dificultăți mult mai mari decît efortul pe care ar trebui să-l facă pentru a înțelege, pe măsura posibilităților lor, esența cunoștințelor care li se transmit.

Pentru nivelul de învățămînt căruia ne adresăm, definițiile cu mulțimi pe care le-am prezentat și pentru scădere și pentru împărțire sînt perfect accesibile, fiind suficient de simple și n aceleași timp corecte.

După cum s-a mai spus, rezultatul c al operației „*“ efectuate între a și b se notează prin $a * b$:

$$a * b = c.$$

Dacă „:“ reprezintă împărțirea cu rest a numerelor naturale, atunci $14 : 3$ va reprezenta numărul natural 4, rezultatul împărțirii cu rest a lui 14 la 3, adică :

$$14 : 3 = 4.$$

Fără precizarea mulțimii în care se operează și a sensului dat operației „:“, s-a văzut că scrierea $14 : 3$ poate să nu aibă sens matematic, să reprezinte numărul natural 4 sau să reprezinte numărul rațional $\frac{14}{3}$ (și $\frac{14}{3} \neq 4 = \frac{4}{1}$).

Observînd că, în cazul în care are un sens, semnificația scrierii $14 : 3$ este ambiguă în absența unor precizări suplimentare, se susține uneori, pentru a înlătura ambiguitatea, să nu se admită scrierea lui 4, rezultatul împărțirii cu rest a lui 14 la 3 în mulțimea numerelor naturale sub forma $14 : 3$. Cu alte cuvinte, să nu se admită scrierea

$$14 : 3 = 4$$

chiar dacă este vorba de mulțimea numerelor naturale și de operația de împărțire cu rest a acestora.

Această scriere, ca manieră de notare a rezultatului, nu poate fi refuzată, deoarece refuzul ar veni în contradicție cu teoria matematică generală pe care am menționat-o. Ar trebui atunci introduse restricții în teorie, din care să rezulte când principiul respectiv de scriere a rezultatului poate fi folosit și când nu. (Ar urma că în unele situații „*” păstrează doar semnificația de operator, pierzând cea de a doua semnificație menționată).

Dimpotrivă, este perfect justificată refuzarea folosirii lui „:” ca simbol de operație pentru împărțirea cu rest în N , ceea ce ar face să nu mai apară scrieri ca :

$$14:3 = 4$$

ci, de exemplu

$$14_*3 = 4$$

dacă se folosește „*” ca simbol al împărțirii cu rest în N .

În manualul de matematică de clasa a III-a nu a fost acceptat un nou simbol pentru împărțirea cu rest, și, rezolvarea dificultăților de notații ivite prin folosirea lui „:” pentru mai multe operații diferite a trebuit să fie făcută prin introducerea unei convenții adecvate, pe care am specificat-o.

Pentru soluționarea problemei notațiilor se poate pune și alternativa renunțării la studiul împărțirii cu rest al numerelor naturale. Aceasta ar însemna și o apreciazabilă simplificare a studiului matematicii, ocazie ce nu ar trebui pierdută, dacă nu ar apărea inconveniente deosebite.

Utilitatea împărțirii cu rest a numerelor naturale pentru rezolvarea unei mari varietăți de probleme desprinse din practică, precum și însemnătatea ei în matematică, fiind folosită în mod curent, de exemplu, în sistemul de lucru al mașinilor de calcul, face să nu se poată renunța la cunoașterea acestei operații.

Revenind la cunoștințele și deprinderile cu care trebuie să rămână elevii, subliniem necesitatea de a analiza, pe bază de exemple, modul cum se află cîțul împărțirii cu rest a două numere naturale, cu ajutorul definiției dată cu mulțimi, și de a observa că rezultatul nu depinde de natura elementelor mulțimii folosite ca model pentru deîmpărțit.

Elevii vor fi conduși cu grijă să observe că rezultatul împărțirii a două numere naturale este același, fie că se găsește prin procedeul prin cuprindere, fie că se găsește prin procedeul prin părți egale, și, de asemenea, restul este același, indiferent prin care din aceste două procedee se efectuează împărțirea.

Va fi pusă în evidență și reținută de elevi fiecare din relațiile $d = (c \times i) + r$ și $0 \leq r < i$. Pe baza lor se va face proba împărțirii, remarcîndu-se că nici una din ele, singură, nu este suficientă pentru a fi siguri că împărțirea este corect efectuată.

Din utilizarea mulțimilor model pentru deîmpărțit și a separării de submulțimi disjuncte cîte două fiecare avînd același număr de elemente, prin oricare din procedeele prin cuprindere și prin părți egale, se va deduce posibilitatea de efectuare a împărțirii prin scădere repetată. Avantajul obținut este acela că se poate afla cîțul și restul prin calcul, fără a mai folosi mulțimi model și separarea de submulțimi disjuncte, ceea ce nu era comod.

Pe bază de exemple elevii vor reține faptul că împărțirea cu rest, ca și cea exactă, nu este posibilă dacă împărțitorul este zero.

Folosind diverse procedee de aflare a cîțului și restului împărțirii, se vor face împărțiri în situația în care : împărțitorul este 1 ; deîmpărțitul este egal cu împărțitorul ; deîmpărțitul este mai mic decît împărțitorul.

Deducînd regulile de aflare a cîtului în diverse situații se va ajunge treptat la următoarea regulă generală, care se va folosi în practică fără a se cere formularea verbală :

Se împart la împărțitor, pe rînd, numerele unităților de fiecare ordin scrise în deîmpărțit la locul ordinului respectiv, începînd de la ordinele cele mai mari, către cele mai mici. Dacă la vreuna din aceste împărțiri se obține rest diferit de zero, unitățile restului se transformă în unități de ordin imediat mai mic și se adună cu unitățile de acest din urmă ordin, aflate în scrierea numărului pe locul ordinului respectiv, apoi se face împărțirea lor la împărțitor.

Restul rămas la împărțirea unităților este restul împărțirii. Cîturile succesive obținute la împărțirile menționate anterior dau cifrele cîtului împărțirii. În cazul în care cîtul primei împărțiri de acest fel este 0, această cifră nu se scrie ca primă cifră a cîtului, ci aceea care se obține la a doua împărțire.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL IV

(Număr de ore, orientativ = 20)

TEMA 1 : ÎMPĂRȚIREA CU REST

Scop : Cunoașterea modului de stabilire a cîtului împărțirii cu rest, în urma aplicării procedeeului prin cuprindere sau a celui prin părți egale. Legătura care există între deîmpărțit, împărțitor, cît și rest, și aceea care există între rest și împărțitor : $d = (c \times i) + r$; $r < i$. Independența cîtului și restului împărțirii de alegerea procedeeului de efectuare, prin cuprindere sau a celui prin părți egale. Cunoașterea probei împărțirii. Împărțirea prin scădere repetată. Împărțirea la 1 ; împărțirea cînd deîmpărțitul și împărțitorul sînt egali ; împărțirea cînd deîmpărțitul este mai mic decît împărțitorul.

Material didactic

Pentru învățător : Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 13).

Pentru elevi : Cutii cu chibrituri, boabe de fasole (cel puțin 30) etc.

Recomandări metodice pentru predarea temei

SUBTEMA 1° : ÎMPĂRȚIREA CU REST EFECTUATĂ PRIN „CUPRINDERE”

(În manual „Primul exemplu”)

a) Activități desfășurate cu elevii fără folosirea manualului

Se prezintă 14 discuri negre din trusă și se cere elevilor să separe, atît cît este posibil, submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd cîte 4 elemente. Se observă că este vorba de folosirea procedeeului prin cuprindere.

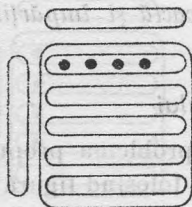


Fig. 98.

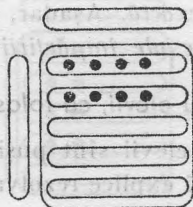


Fig. 99.

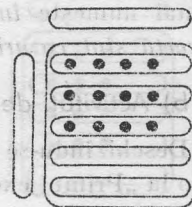


Fig. 100.

Un elev va realiza practic separarea în submulțimi solicitată de învățător, găsind 3 submulțimi și rămânându-i 2 discuri cu care nu mai poate forma o nouă submulțime.

Învățătorul va repeta rezolvarea problemei folosind panoul 13, pe care va așeza câte 4 discuri negre în câte o submulțime, până îi vor rămâne prea puține discuri pentru a mai forma o nouă submulțime (figurile 98, 99, 100). Prin numărare se găsesc 3 submulțimi (formate) a câte 4 elemente fiecare și 2 discuri negre rămase în afara acestor submulțimi.

Înlocuind cele 14 discuri negre cu 14 triunghiuri albastre, apoi cu 14 patrate roșii, se va constata că numărul submulțimilor obținute și numărul elementelor rămase în afara acestor submulțimi nu depind de natura elementelor mulțimii date, ci doar de numărul lor și de numărul elementelor fiecăreia din submulțimile formate. Din această observație rezultă că numerele 14 și 4 împreună cu procedeul prin cuprindere determină numărul 3 al submulțimilor formate și numărul 2 al discurilor rămase în afara acestora.

Pe baza acestei observații se introduce *împărțirea cu rest a numerelor 14 și 4, ca operație prin care luând o mulțime model cu 14 elemente și separând în ea, atât cât este posibil, submulțimi disjuncte două câte două fiecare având câte 4 elemente, se află numărul submulțimilor ce pot fi formate*. Scriem :

$$14 : 4 =$$

Prin numărare găsim :

$$14 : 4 = 3 \text{ (rest 2).}$$

Din mcdul în care s-a făcut împărțirea se vede că avem :

$$14 = (3 \times 4) + 2 \text{ și } 2 < 4$$

Folosind panoul 13 se vor efectua în mod asemănător împărțirile :

$$13 : 5 = \quad 12 : 3 = \quad 18 : 4 =$$

Cu această ocazie se va observa că împărțirea cu rest este posibilă și în situația în care se obține un rest diferit de zero (cazurile $14 : 4 =$; $13 : 5 =$; $18 : 4 =$), și în cazurile în care se obține restul zero (cazul $12 : 3 =$).

Se vede că împărțirea cu rest în cazul în care restul este zero coincide cu împărțirea exactă. Dacă restul este diferit de zero împărțirea respectivă

se mai numește împărțire neexactă. Așadar, împărțirea exactă și împărțirea neexactă sînt cazuri particulare ale împărțirii cu rest.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Deschizîndu-se manualul, elevii sînt puși să citească problema propusă acolo la „Primul exemplu” și să explice rezolvarea pe etape, folosind figura 34 din manual.

Din discuțiile astfel ocazionate se va ajunge la definiția împărțirii cu rest a numerelor naturale.

Privind figura 34 din manual, se va observa că avem :

$$14 = (3 \times 4) + 2 \text{ și } 2 < 4, \text{ sau în general,}$$

$d = (c \times i) + r$, și $r < i$. (Atenție ! Aici scriem $c \times i$ și nu $i \times c$, deși $c \times i = i \times c$).

Notă : Cele 4 puncte desenate la fiecare etapă în conturul de sus au rolul de a aminti cîte elemente se aleg într-o submulțime. Punctele completate cîte unul la fiecare etapă în conturul din stînga, „numără” cîte submulțimi se formează.

Muncă independentă

Folosind ca mulțimi model mulțimi de boabe de fasole, sau de bețe de chibrituri, elevii vor efectua împărțirea $7 : 2 =$ propusă în manual ca încheiere la „Primul exemplu” și apoi nr. 1 punctul (a) de la „Exerciții și probleme”.

Acasă se vor efectua celelalte exerciții și probleme rămase în manual, în mod asemănător.

**Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile
și problemele propuse la subtema 1°**

Pentru fiecare din ele se vor alege mulțimi model (de chibrituri sau scobitori, fasole etc.) și se va folosi procedeul prin cuprindere. Se pot folosi și mulțimi de puncte, după modelul figurii 34 din manual.

SUBTEMA 2° : ÎMPĂRȚIREA CU REST EFECTUATĂ PRIN „PĂRȚI EGALE”

(în manual : „Al doilea exemplu”)

a) Activități desfășurate cu elevii fără folosirea manualului

Se prezintă 14 discuri negre din trusă și se cere elevilor să separe 4 submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd același număr de elemente.

Se observă că este vorba de folosirea procedeului prin părți egale. Un elev va realiza practic separarea în submulțimi solicitată de învățător. Se

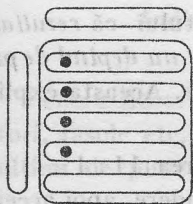


Fig. 101.

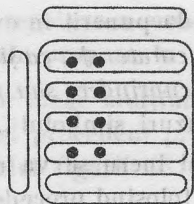


Fig. 102.

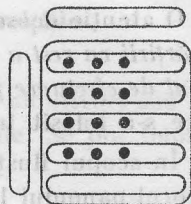


Fig. 103.

obține în fiecare submulțime câte 3 discuri negre, rămânând 2 discuri, prea puține pentru a mai putea completa câte unul în fiecare din cele 4 submulțimi.

Învățătorul va repeta rezolvarea problemei folosind panoul 13. Pe el va alege 4 submulțimi și va distribui în fiecare din ele câte un disc (fig. 101); apoi, va distribui în fiecare din ele câte un al doilea disc (fig. 102); el va continua așa pînă ce din mulțimea celor 14 discuri nu-i vor mai rămîne suficiente pentru a mai putea distribui încă câte unul în fiecare din cele 4 submulțimi. În final panoul 13 va arăta ca în fig. 103. Prin numărare se găsesc 3 discuri într-o submulțime și 2 discuri rămase în afara acestor submulțimi.

Înlocuind cele 14 discuri negre cu 14 triunghiuri albastre, apoi cu 14 pătrate roșii, se va constata că numărul discurilor obținute într-o submulțime și numărul discurilor rămase în afara acestor submulțimi nu depind de natura elementelor mulțimii date, ci doar de numărul lor și de numărul subunităților ce trebuie formate. Din această observație rezultă că numerele 14 și 4, împreună cu procedeul prin părți egale, determină numărul 3 al elementelor dintr-o submulțime și numărul 2 al elementelor rămase în afara acestora.

Pe această bază se introduce împărțirea cu rest a numerelor 14 și 4 ca operație prin care luînd o mulțime cu 14 elemente și separînd în ea 4 submulțimi disjuncte două câte două, fiecare avînd același număr de elemente, aflăm câte elemente revin într-o astfel de submulțime. Se notează:

$$14 : 4 =$$

Prin numărare găsim:

$$14 : 4 = 3 \text{ (rest 2).}$$

Din modul în care s-a făcut împărțirea se vede că avem:

$$14 = (4 \times 3) + 2 \quad \text{și} \quad 2 < 4.$$

Folosind panoul 13 și procedeul prin părți egale se vor efectua în mod asemănător împărțirile:

$$13 : 5 = ; \quad 12 : 3 = ; \quad 18 : 4 =$$

Se va constata că împărțirea cu rest făcută cu procedeul prin părți egale este posibilă, fie că se obține rest diferit de zero ($13 : 5 = 2$; $18 : 4 = 4$), fie că se obține restul zero ($12 : 3 = 4$).

O atenție deosebită se va da punerii în evidență a faptului că rezultatul împărțirii cu rest a două numere naturale, ca și restul obținut, nu depind de procedeul de efectuare folosit, prin cuprindere sau prin părți egale. Aceasta explică de ce s-a folosit în ambele cazuri simbolul „:”.

În scopul ilustrării acestui lucru se va reface împărțirea $14 : 4 =$ cu ajutorul panoului 13 al trusei, folosind procedeul prin cuprindere, apoi aceeași împărțire folosind procedeul prin părți egale. Cu ocazia aplicării ultimului procedeu se va pune în evidență că, completarea cu al doilea disc a submulțimilor formate începe după ce din mulțimea model pentru deîmpărțit s-au luat 4 elemente. Completarea cu al treilea disc a submulțimilor formate începe după ce din mulțimea model pentru deîmpărțit s-au mai luat 4 elemente, ș.a.m.d.

Așadar, în submulțimile pe care le formăm vom pune de atâtea ori câte un element, câte submulțimi a 4 elemente fiecare, disjuncte între ele, pot fi formate din mulțimea model pentru deîmpărțit. Dar aceasta înseamnă că numărul elementelor obținute într-o submulțime la aplicarea procedeeului prin părți egale coincide cu numărul de submulțimi obținute la aplicarea procedeeului prin cuprindere.

În acest mod devine limpede că rezultatul împărțirii $14 : 4 =$ (ca și restul) nu depinde de natura elementelor mulțimii model folosite pentru deîmpărțit, nici de procedeul folosit pentru formarea submulțimilor disjuncte, ci numai de numerele naturale ce sînt la deîmpărțit și împărțitor.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Deschizînd manualul, elevii citesc problema propusă la „Al doilea exemplu” și explică rezolvarea, pe etape, folosind figura 35 din manual.

Cele 4 puncte puse în conturul din stînga, la fiecare etapă, amintesc numărul submulțimilor ce trebuie formate. Punctele completate în conturul de sus, cite unul la fiecare etapă, „numără” cite elemente se obțin într-o submulțime. (Acestea ar putea fi puse în evidență și cînd se lucrează pe panoul 13, folosind, bineînțeles, alte discuri decît cele 14 care trebuiau distribuite în 4 submulțimi).

Privind figura 35 din manual se va observa că avem :

$$14 = (4 \times 3) + 2 \text{ și } 2 < 4, \text{ sau în general, } d = (i \times c) + r \text{ și}$$

$$r < i \text{ (Atenție ! Aici scriem } i \times c \text{ și nu } c \times i, \text{ deși } i \times c = c \times i).$$

Muncă independentă

Folosind ca mulțimi model, mulțimi de boabe de fasole sau de bețe de chibrituri, elevii vor efectua împărțirea $11 : 4 =$ propusă în manual la sfîrșitul subtemei, și ex. nr. 1, punctul (a) din cele ce urmează la „Exerciții și probleme”.

Acasă se vor efectua celelalte exerciții și probleme rămase în manual, în mod asemănător.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la subtema 2°

Pentru fiecare din ele se vor alege mulțimi model (de chibrituri sau scobitori, fasole etc.) și se va folosi procedeul prin părți egale. Se pot folosi și mulțimi de puncte, după modelul figurii 35 din manual.

SUBTEMA 3° : ÎMPĂRȚIREA CU REST EFECTUATĂ PRIN SCĂDERE REPETATĂ

(În manual : „Al treilea exemplu”)

Învățătorul nu poate întâmpina dificultăți în elaborarea lecției pe baza textului din manual.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele proapse la subtema 3°

Problema 2

- a) $36 : 5 = 7$ (rest 1) ; b) $36 : 8 = 4$ (rest 4) ; c) $36 : 4 = 9$ (rest 0)
d) $36 : 10 = 3$ (rest 6)

Problema 3

Prin scădere repetată obținem :

- a) $36 : 7 = 5$ (rest 1) ; b) $36 : 10 = 3$ (rest 6) ; c) $36 : 11 = 3$ (rest 3) ;
d) $36 : 12 = 3$ (rest 0)

Notă : La ultimele două probleme scăderea repetată a fost folosită ca mijloc de aflare a citului împărțirilor. Operația de împărțire pentru rezolvarea problemelor a fost impusă de textul fiecărei probleme, la (2) fiind vorba de o separare în submulțimi disjuncte care „cere” procedeul prin cuprindere, iar la (3) fiind vorba de o separare în submulțimi disjuncte care „cere” procedeul prin părți egale.

SUBTEMELE 4 ȘI 5 : „ÎMPĂRȚIREA CU REST” ȘI „PROBA ÎMPĂRȚIRII”

Se va urmări sublinierea faptului că, dacă restul este zero împărțirea se numește exactă, dacă restul diferă de zero împărțirea se numește neexactă (ambele fiind împărțiri cu rest). La proba împărțirii se va sublinia că nici una din condițiile $r < i$ și $d = c \times i + r$ nu este suficientă, singură, pentru a fi siguri că împărțirea a fost făcută corect.

TEMA A 2-A : ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE SCRISE CU O CIFRĂ

Scop : Pe baza cunoștințelor avute pînă în prezent în legătură cu împărțirea, se va deduce un procedeu de calcul care să poată apoi fi extins și la numerele de mai multe cifre, spre a se ajunge la procedeul obișnuit de efectuare a împărțirii numerelor naturale.

Material didactic :

Pentru învățător : Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 12).

Recomandări metodice pentru predarea temei

La primele două exemple din manual, împărțirile $8 : 4 =$ și $8 : 3 =$ vor fi efectuate cu procedeul prin părți egale, folosind panoul 12 din trusă.

Pentru $8 : 4 =$ figura 104 arată cum se realizează pe panou mulțimea model pentru deîmpărțitul 8; figura 105 arată cum se distribuie elementele mulțimii model pentru deîmpărțit în cele 4 submulțimi disjuncte câte două, astfel încât fiecare să aibă același număr de elemente; figura 106 arată aspectul panoului 12 al trusei după ce s-au deplasat piesele așa cum arată figura 105.

Din aspectul final al panoului 12 redat în figura 106 rezultă că fiecare submulțime obținută are 2 elemente, nerămânând nici un element al mulțimii model pentru deîmpărțit necuprins în submulțimile formate. Așadar, se scrie :

$$8 : 4 = 2 \text{ (rest 0)}$$

Pentru a efectua împărțirea $8 : 3 =$ folosind panoul 12 al trusei procedăm ca la exemplul anterior. Figura 104 arată cum se realizează pe panou mulțimea model pentru deîmpărțitul 8; figura 107 arată cum se distribuie elementele ei în cele 3 submulțimi ce trebuie formate (disjuncte între ele și având același număr de elemente; figura 108 arată aspectul panoului 12 după deplasarea pieselor așa cum arată figura 107. Din figura 108 se vede că în fiecare

din cele 3 submulțimi s-au obținut câte 2 elemente, rămânând 2 elemente care nu mai pot fi distribuite în cele 3 submulțimi, astfel încât acestea să aibă, fiecare același număr de elemente. Așadar :

$$8 : 3 = 2 \text{ (rest 2)}$$

Notă : Cu aceste recomandări și folosind textul din manual, elaborarea lecțiilor din această temă nu poate crea dificultăți.

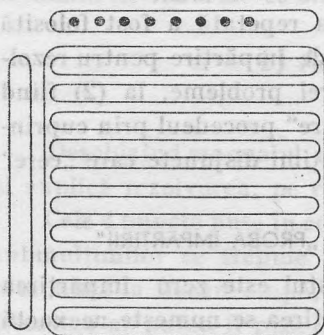


Fig. 104.

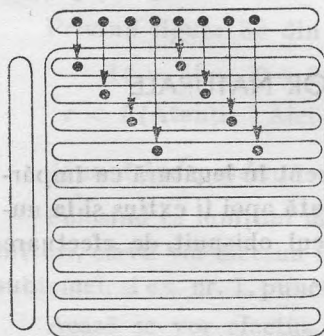


Fig. 105.

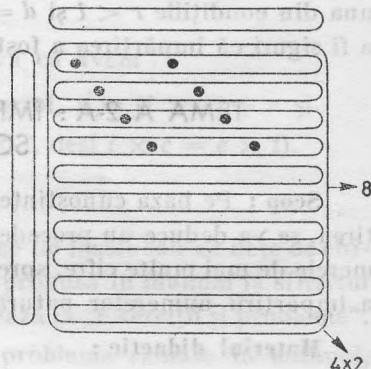


Fig. 106.

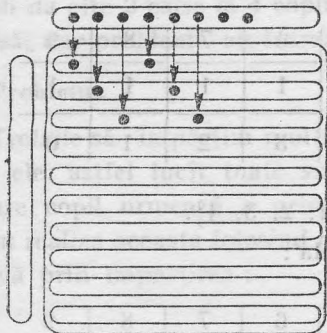


Fig. 107.

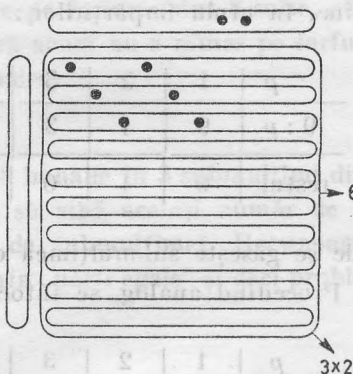


Fig. 108.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 2-a

Exercițiul 1

Se are în vedere efectuarea împărțirilor așezînd calculele în scris și apoi trecerea cîtului și restului în tabele.

De exemplu, în prima tabelă pentru $n = 3$ avem

$$7 : 3 = 2 \text{ cîtul}$$

$$\frac{6}{1} \text{ restul}$$

Vom trece în rîndul corespunzător lui $n = 3$, în coloana cîtului, numărul 2, iar în coloana restului, numărul 1.

Exercițiul 2

După completarea celor două tabele de la exercițiul anterior, privim în coloanele restului și alegem cazurile de împărțire care au dat restul zero. În toate aceste cazuri împărțirea s-a făcut exact, iar în celelalte cazuri nu.

Exercițiul 3

Trebuie efectuate, folosind regula de calcul în scris :

$$\begin{array}{lll} a) \ 8 : 4 = & 8 : 7 = & b) \ 4 : 4 = \quad 7 : 4 = \\ 8 : 5 = & 8 : 8 = & 5 : 4 = \quad 8 : 4 = \\ 8 : 6 = & & 6 : 4 = \end{array}$$

Problema 4

a) Se fac (calculînd în scris) împărțirile :

$$\begin{array}{lllll} 9 : 1 = & 9 : 3 = & 9 : 5 = & 9 : 7 = & 9 : 9 = \\ 9 : 2 = & 9 : 4 = & 9 : 6 = & 9 : 8 = & \end{array}$$

și se aleg numerele p care puse ca împărțitor, au dat cîtul cel mult egal cu 2.

Se obține, în urma împărțirilor :

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9 : p$	9	4	3	2	1	1	1	1	1
restul	0	1	0	1	4	3	2	1	0

de unde se găsește submulțimea căutată : $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) Procedind analog, se întocmește tabela :

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p : 3$	0	0	1	1	1	2	2	2	3
restul	1	2	0	1	2	0	1	2	0

de unde se găsește submulțimea căutată : $\{6, 7, 8, 9\}$.

c) p se împarte exact la 2, dacă împărțit la 2 dă restul zero. Așadar, făcând împărțirile în scris, completăm tabela

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p : 2$	0	1	1	2	2	3	3	4	4
restul	1	0	1	0	1	0	1	0	1

din care alegem submulțimea căutată : $\{2, 4, 6, 8\}$.

Problema 5

Este o problemă de împărțire prin cuprindere : de câte ori pot lua câte 2 caise din 9 caise ? Deci câte submulțimi de câte 2 elemente, disjuncte între ele, pot face într-o mulțime cu 9 elemente ? Pe baza acestei observații problema se rezolvă prin operația :

$$9 : 2 =$$

Modul de aflare a citului rămîne la libera noastră dorință, nefiind obligați a-l lega de conținutul problemei, care a condus la necesitatea efectuării unei împărțiri în scopul rezolvării.

Făcînd calculul în scris, obținem :

$$9 : 2 = 4$$

$$\frac{8}{1}$$

Așadar, dintr-o farfurie cu 9 caise pot da câte 2 caise la 4 copii. (Observă că a rămas pe farfurie 1 caisă, dar problema nu întreabă acest lucru).

Judecînd asemănător, în cazul în care pe farfurie sînt 8 caise, găsim că putem da cîte 2 caise la 4 copii. (Observ că acum nu a rămas pe farfurie nici o caisă, dar problema nu întreabă acest lucru).

Problema 7

Trebuie să împărțim mulțimea celor 8 banane în 3 submulțimi disjuncte între ele, astfel încît toate submulțimile să aibă același număr de banane (fiecare copil urmează a primi o astfel de submulțime). Recunoaștem că putem realiza aceasta folosind procedeul prin „părți egale” și deci problema se rezolvă prin împărțirea :

$$8 : 3 =$$

Cîtul acestei împărțiri urmează a fi găsit prin procedeul care ne convine mai mult. Folosind calculul în scris, avem

$$8 : 3 = 2 \text{ cîtul}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \text{ restul}$$

Așadar, fiecare copil va primi 2 banane.

Judecînd asemănător, în celelalte situații obținem, respectiv : 2 banane ; 2 banane ; 3 banane (uneori rămîn banane nedistribuite, așa cum este cazul cînd sînt 7 banane).

Observație importantă

Rezolvarea problemelor 5 și 7 de mai sus pune limpede în evidență că, *recunoașterea faptului că o problemă se rezolvă prin împărțire este favorizată de cunoașterea temeinică a procedeeleor numite prin cuprindere și prin părți egale, pentru separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele fiecare avînd același număr de elemente, și de cunoașterea definiției pe această bază a împărțirii numerelor naturale, și nu este favorizată de cunoașterea tehnicii de aflare a cîtului. Ca urmare, noul mod de prezentare a împărțirii numerelor naturale dacă este tratat cu toată atenția de învățător, va duce la o mai mare îndeminare a elevilor în rezolvarea problemelor de împărțire, decît în situația de pînă acum, cînd centrul atenției cădea pe tehnica de calcul a cîtului și pe legătura împărțirii cu înmulțirea (care rămînea destul de confuză în cazul împărțirii cu rest).*

Problema 8

Trebuie separată mulțimea celor 8 lei în 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare conținînd același număr de lei, care reprezintă costul unui creion. Aceasta se realizează cu procedeul prin părți egale. Așadar, problema se rezolvă prin împărțirea :

$$8 : 4 =$$

Modul de efectuare a împărțirii nu trebuie legat obligatoriu de judecata problemei care a impus această operație. Se va folosi tehnica de efectuare care convine mai mult, și mai ales calculul în scris. Rezolvarea problemei se serie :

Costul unui creion :

$$8 : 4 = 2$$

Costul a 3 creioane :

$$3 \times 2 = 6$$

$$8 : 4 = 2$$

$$\underline{8}$$

Răspuns : 2 lei ; 6 lei.

Problema 9

Din mulțimea celor 7 lei trebuie să separ submulțimi disjuncte a câte 3 lei fiecare. Câte subunități obțin, atâtea cărți se pot cumpăra. Separarea în submulțimi observăm că se face cu procedeul prin cuprindere. Astfel, sintem conduși la efectuarea împărțirii :

$$7 : 3 = 2 \text{ (rest 1).}$$

Așadar, din 7 lei pot cumpăra 2 cărți a 3 lei fiecare.

La fel se judecă și se rezolvă problema dacă în loc de 7 lei avem : 6 lei ; 8 lei ; 9 lei ; 5 lei ; 4 lei.

Problema 11

Costul fructelor :

$$7 \times 6 = 42$$

Suma rămasă :

$$50 - 42 = 8$$

$$50 -$$

$$\underline{42}$$

$$= 8$$

$$8 : 4 = 2$$

$$\underline{8}$$

$$=$$

Costul unui caiet :

$$8 : 4 = 2$$

Răspuns : 2 lei.

Ultima operație este cerută de faptul că, mulțimea celor 8 lei trebuie separată în 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente (lei). Aceasta se realizează cu procedeul prin părți egale, ceea ce conduce la operația de împărțire $8 : 4 =$.

TEMA A 3-A : ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE

SCRIS CU DOUĂ CIFRE

Scop : Gruparea împărțirilor pe tipuri, pe baza folosirii, sau nu, a aceleiași tehnici de calcul. Eșalonarea judicioasă a studiului diverselor tipuri stabilite, astfel încît de fiecare dată regula corespunzătoare de calcul să se deducă

logic din cunoștințele generale avute de elevi, completate cu tehnicile de calcul a tipurilor de împărțire studiate anterior.

Sublinierea, la fiecare tip de împărțire, a acelor procedee de lucru care vor fi reținute și dezvoltate în studierea tipurilor următoare, realizându-se astfel o apropiere treptată de regula generală care va fi aplicabilă la orice împărțire de numere naturale.

Accentul nu se va pune pe verbalizări, ci pe formarea deprinderilor practice de lucru (până la automatisme).

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile existente în manual, la fiecare lecție.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Tipurile de împărțiri care se disting după regula de calcul sînt acelea la care :

1°. *Cifra zecilor și cea a unităților deîmpărțitului reprezintă numere ce se împart exact la împărțitor.*

Exemplu : $68 : 2 =$

Observînd că numărul 0 se împarte exact la orice număr, deoarece se obține la împărțire restul 0 (de exemplu $0 : 3 = 0$ (rest 0)), împărțirile de felul :

$$60 : 3 =$$

trebuie privite drept cazuri particulare a celor anterioare, putîndu-se efectua cu aceeași regulă de calcul.

2°. *Cifra unităților deîmpărțitului reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor.*

Exemple : $68 : 3 =$; $83 : 4 =$

3°. *Cifra zecilor deîmpărțitului reprezintă un număr mai mic decît împărțitorul.*

Exemple : $23 : 3 =$ $49 : 8 =$ $63 : 7 =$
 $40 : 6 =$ $37 : 8 =$ $30 : 5 =$

4°. *Cifra zecilor deîmpărțitului reprezintă un număr mai mare decît împărțitorul, dar care nu se împarte exact la împărțitor.*

Exemple : $83 : 3 =$ $80 : 3 =$ $87 : 3 =$
 $56 : 2 =$ $63 : 4 =$ $95 : 4 =$

Cele patru categorii de împărțiri menționate mai sus sînt enumerate în ordinea gradului de dificultate și, totodată, a derulării logice a ideilor.

Așa cum se va constata cu ocazia stabilirii regulilor de efectuare, cele din categoria (2°) folosesc ideea de la categoria (1°), cu particularitatea că numărul reprezentat de cifra unităților de împărțitului nu se împarte exact la împărțitor.

Împărțirile din aceste două categorii nu creează, în general, dificultăți elevilor.

Împărțirile din categoria (3°) merită o atenție deosebită, însușirea lor de către elevi hotărînd, în ultimă instanță, abilitatea elevilor de a face împărțirile, în orice situație întîlnită.

Împărțirile din categoria (4°) duc, pe o anumită etapă a efectuării lor, la împărțiri din categoria (3°).

Din cele de mai sus decurge că schimbarea ordinii de studiu a celor patru categorii de împărțiri nu este posibilă, fără a afecta logica transmiterii cunoștințelor la elevi.

Trebuie observat că la împărțirile din categoriile (3°) și (4°), faptul că numărul reprezentat de cifra unităților se împarte exact, sau nu, la împărțitor, nu joacă un rol deosebit. Indiferent care ar fi cifra unităților, este important dacă numărul pe care îl reprezintă, adunat cu numărul obținut la transformarea în unități a restului rămas la împărțirea zecilor, se împarte exact, sau nu, la împărțitor, deoarece de aceasta depinde dacă împărțirea dată inițial este exactă sau neexactă.

Utilizarea figurilor numerice la deducerea regulilor de efectuare a împărțirii numerelor naturale a dus, ca și la adunare și scădere, la realizarea unor diagrame explicative care aproape nu au nevoie de „explicații” în cuvinte, reprezentînd adevărate grafuri logice ale desfășurării proceselor de gîndire în situațiile respective. Cu descifrarea acestor grafuri elevii se obișnuiesc repede putîndu-le apoi „citi” în mod independent, chiar în cazul prezentării unor situații noi, încă necunoscute.

Ca modalitate de valorificare a figurilor numerice există o deosebire importantă față de situația de la adunare și scădere, în aceea că *acuma nu vom „materializa” procesele de gîndire sub forma unor acțiuni nemijlocite cu piesele trusei pentru studiul numerelor naturale.* În adevăr, trusa nu conține, deocamdată, panouri potrivite acestui scop. Ar fi fost necesar să se poată realiza panouri pentru împărțirea numerelor de două și trei cifre (dealtfel destul de ușor de conceput prin modificarea panourilor 6 și 10).

Sintem nevoiți să ne limităm la a folosi planșe reprezentînd figurile din manual.

Ar fi o sarcină neplăcută și inutilă să se ceară elevilor să execute aceste figuri. Folosul lor este doar pînă ce elevii, „surprinz” ideea pe care o ilustrează, deducînd astfel în mod conștient regula de calcul. Imediat însă ce au observat această regulă trebuie să o aplice pentru a o reține și a-și forma abilități și deprinderi de calcul. Executarea figurilor de către elevi ar fi o adevărată sală-horie.

Figurile trebuie să constituie un suport vizual al explicațiilor verbale date de învățător, care să favorizeze conducerea gîndirii elevilor pe același iti-

nerar pe care îl parcurge și gândirea învățătorului (sarcină importantă și dificilă, avînd în vedere vîrsta elevilor). De aceea nu credem potrivită executarea pe tablă ad-hoc a figurilor de către învățător, mai ales că unele din ele nu sînt simplu de executat.

Învățătorul va trebui să se îngrijească de executarea figurilor înaintea lecțiilor, pe planșe care să fie apoi prezentate și comentate la momentul oportun.

Nu ar fi rău dacă aceste planșe după folosire ar putea rămîne un timp expuse în clasă, la vedere.

Ca manieră generală de deducere a regulilor de caleul la această temă :

a) Se prezintă împărțirea a cărei regulă de efectuare se caută și se încearcă a se găsi citul cu mijloacele deja cunoscute. Se stabilește cauza care împiedică obținerea citului cu aceste procedee.

b) Pentru a putea depăși dificultatea întîmpinată se apelează la definiția cu mulțimi a împărțirii numerelor naturale. În acest scop, în structura numerică zecimală a unei mulțimi model pentru deîmpărțit se separă, folosind procedeul prin „părți egale“, atîtea submulțimi disjuncte între ele avînd același număr de elemente, cîte arată împărțitorul.

În procesul separării se urmărește să se obțină structurile numerice zecimale ale submulțimilor ce trebuie formate. Oricare din ele va fi structura unei mulțimi model pentru cit.

Pentru ca la separarea în submulțimi să fie necesare cît mai puține transformări a unităților de un anumit ordin în unități de ordine mai mici, separarea va începe de la unitățile de ordin mai mare, către unitățile de ordin mai mic.

Dacă la un moment dat rămîn prea puține unități de un anumit ordin pentru a mai putea „distribui“ cîte una în fiecare din submulțimile pe care le formăm, aceste unități le transformăm în unități de ordin imediat mai mic. Mulțimea obținută, reunită cu mulțimea unităților acestui din urmă ordin, formează o mulțime ale cărei elemente trebuie distribuite în continuare în submulțimile cerute de împărțitor.

Cînd procedeul menționat ajunge la unitățile de ordinul I, în momentul în care au rămas prea puține unități pentru a mai putea fi distribuite cîte una în fiecare din submulțimile formate, procedeul nu mai poate fi continuat.

c) Privind diagramele care sugerează modul în care s-a realizat separarea în submulțimi cerută de definiția cu mulțimi a împărțirii numerelor naturale, se deduce ușor regula de calcul pentru fiecare categorie de împărțire, din cele patru menționate.

Mai întîi regula „descoperită“ cu ajutorul diagramei va fi aplicată în exerciții de împărțire făcute oral, pentru ca elevii să se familiarizeze cu ea, apoi se va arăta și așezarea calculului în scris.

Calculul în scris va fi făcut și la împărțiri care se fac oral cu ușurință, deoarece atenția elevilor nefiînd concentrată în astfel de situații asupra aspectelor de conținut, se va putea reține mai ușor procedeul de așezare a calculului în scris.

Or, acest procedeu se păstrează fără modificări esențiale și la împărțirile mai dificile, care vor fi prezentate astfel pe un teren mai bine pregătit.

În ce privește efectuarea orală a împărțirilor trebuie păstrată o măsură, neinsistându-se pentru a se face oral împărțiri greoaie, efort care adesea în loc să folosească elevilor, îi încurcă mai rău. Care anume împărțiri trebuie considerate prea grele pentru calculul oral, nu se poate spune în general, lucrul depinde de nivelul clasei. În orice caz, va fi mai folositor a se destina întăririi calculului scris timpul ce s-ar irosi pentru obositoare căutări orale a rezultatelor unor împărțiri complicate.

Subliniem încă o dată să nu se ceară memorarea și „recitarea” regulilor de calcul, ci să se insiste asupra efectuării în practică a împărțirilor de tipul celor învățate.

Ținând seama de concepția generală asupra temei care se degajă din precizările anterioare, elaborarea lecțiilor pe baza textului din manual nu poate crea dificultăți.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 3-a

Problema 4 (subtema 1°)

În fiecare coș sînt 22 ouă. În coșul din care se iau 12 ouă, rămîn 10 ouă. În două coșuri luate la întîmplare pot fi 32 ouă, sau 44 ouă, după cum printre ele se află, sau nu, coșul din care s-au luat cele 12 ouă.

Problema 6 (subtema 1°)

Prima rezolvare :

Dacă și celălalt conducător auto ar fi economisit încă 16 l benzină, în total s-ar fi economisit $(80 + 16)$ litri benzină :

$$80 + 16 = 96.$$

Fiecare din ei ar fi economisit atunci $(96 : 2)$ litri :

$$96 : 2 = 48.$$

În realitate, doar unul a economisit 48 l, celălalt cu 16 l mai puțin :

$$48 - 16 = 32.$$

Răspuns : 48 l ; 32 l.

A doua rezolvare :

Dacă unul din conducătorii auto nu ar fi economisit cei 16 l benzină în plus, economia totală ar fi fost $(80 - 16)$ litri.

$$80 - 16 = 64$$

Fiecare din ei ar fi economisit atunci $(64 : 2)$ litri :

$$64 : 2 = 32.$$

În realitate doar unul a economisit 32 l, deoarece celălalt are 16 l în plus :

$$32 + 16 = 48$$

Răspuns : 48 l ; 32 l.

Problema 2 (subtema 3°, la „Exerciții și probleme“
ca și cele care urmează)

Se împarte, pe rînd, 42 la toate numerele naturale de la 1 la 9. Se găsește :

a) {1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7} ; b) {4 ; 5 ; 8 ; 9}.

Problema 4

Se observă că avem $A = \{80 ; 81 ; 82 ; \dots ; 89 ; 90\}$

a) Împărțind, pe rînd, toate numerele din A la 6 și alegînd pe acelea care au dat la împărțire același cît, obținem :

{80 ; 81 ; 82 ; 83} care au dat la împărțire cîtul 13 ;

{84 ; 85 ; 86 ; 87 ; 88 ; 89} care au dat la împărțire cîtul 14 ;

{90} care a dat la împărțire cîtul 15

b) Împărțind, pe rînd, toate numerele din A la 3 și alegînd pe acelea care au dat același rest, obținem :

{81 ; 84 ; 87 ; 90} care au dat la împărțire restul 0 ;

{82 ; 85 ; 88} care au dat la împărțire restul 1 ;

{80 ; 83 ; 86 ; 89} care au dat la împărțire restul 2.

Problema 6

Se vede că numărul cu 4 mai mic decît 76 se împarte exact la 9. Avem :

$$76 - 4 = 72 ; \quad 9 \times n = 72 ; \quad n = 72 : 9 ; \quad n = 8.$$

Împărțitorul este 8. În adevăr, efectuînd împărțirea obținem :

$$76 : 8 = 9 \text{ (rest 4).}$$

Problema 7

Numărul cu 4 mai mic decît 39 se va împărți exact la 5, cîtul fiind numărul căutat :

$$39 - 4 = 35 ; \quad 35 : 5 = 7.$$

Observînd că avem :

$$39 : 5 = 7 \text{ (rest 4)}$$

formularea cerută va fi „La o împărțire deîmpărțitul este 39, împărțitorul 5 și restul este 4. Aflați cîtul“.

Problema 8

Se împart, pe rînd, la 2 și la 3 numărul metrilor de stofă aflată în val și se vede care rest este mai mic.

Fig. 109.

Se găsește că trebuie făcute rochiile cu mineca :

a) scurtă ; b) lungă ; c) nu are importanță felul rochiilor, rămâne același rest de stofă , 1 m ; d) scurtă ; e) scurtă.

Problema 9

Fiecare roată s-a învîrțit de atîtea ori, de cîte ori distanța parcursă de ea la rotirea completă se cuprinde în distanța totală parcursă de bicicletă (nu este nevoie a se „face“ nici un fel de „teorie“ despre cerc sau lungimea cercului, experiența de viață a elevilor este suficientă). Pentru sugerarea rezolvării se poate folosi figura 109. Se vede că rezolvarea revine la a împărți distanța parcursă de bicicletă, pe rînd, la distanțele parcurse de fiecare roată la rotirea completă :

a) 6 ; 9 ; b) 9 ; 14 ; c) 22 ; 33 ; d) 23 ; 34 ; e) 19 ; 28 ; f) 30 ; 45.

Ultima întrebare este o „capcană“, deoarece fiecare roată a parcurs, în fiecare caz, aceeași distanță pe care a parcurs-o bicicleta.

TEMA A 4-A : ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE SCRISE CU TREI CIFRE

Scop : Același ca la tema anterioară.

Material didactic

Pentru învățător : Planșe cu figurile existente în manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Se disting următoarele tipuri de împărțiri după tehnica de calcul folosită :

1°) Cifrele sutelor, zecilor și unităților reprezintă numere care se împart exact la împărțitor.

În aceeași categorie sînt incluse împărțirile numerelor la care cifra zecilor, sau a unităților, sau amîndouă, sînt 0.

Exemple : $696 : 3 =$; $690 : 3 =$; $609 : 3 =$; $800 : 2 =$

2°) Cifra unităților reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor.

Exemple : $855 : 2 =$; $603 : 2 =$

3°) Cifra zecilor reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor.

Exemple : $683 : 3 =$; $896 : 4 =$; $850 : 4 =$;
 $417 : 2 =$; $428 : 4 =$;

4°) Cifra sutelor reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor

Exemple : $236 : 3 =$; $216 : 4 =$; $708 : 8 =$; $200 : 8 =$;
 $531 : 2 =$; $737 : 3 =$; $896 : 3 =$; $912 : 4 =$;
 $507 : 2 =$; $650 : 4 =$; $700 : 3 =$;

Cele spuse în legătură cu împărțirea numerelor scrise cu două cifre rămân valabile și pentru împărțirea numerelor scrise cu trei cifre, desigur, asortate corespunzător noilor situații.

Tehnologia didactică după care se vor desfășura lecțiile din această temă este asemănătoare celei folosite la tema anterioară.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele

propușe la tema a 4-a

Problema 4 (subtema 3° b)

$(n \times 4) + 2 = 850$. Se vede că 850 poate fi privit ca deîmpărțit, 4 împărțitorul, n cîntul și 2 restul. Așadar, n este cîntul împărțirii :

$$850 : 4 = 212 \text{ (rest 2).}$$

Problema 5 (subtema 3° b)

Se vor vedea și indicațiile de la problema 6, subtema (1°) de la tema anterioară.

Prima rezolvare :

$$\begin{array}{r} 435 + 19 = 454 \\ 454 : 2 = 227 \\ 227 - 19 = 208 \end{array} \quad \begin{array}{r} 435 + \\ 19 \\ \hline 454 \end{array} \quad \begin{array}{r} 454 : 2 = 227 \\ 4 \\ \hline 227 - \\ \hline 208 \end{array}$$

Răspuns : 227 și 208.

A doua rezolvare

$$\begin{array}{r} 435 - 19 = 416 \\ 416 : 2 = 208 \\ 208 + 19 = 227 \end{array} \quad \begin{array}{r} 435 - \\ 19 \\ \hline 416 \end{array} \quad \begin{array}{r} 416 : 2 = 208 \\ 4 \\ \hline 208 + \\ \hline 227 \end{array}$$

Răspuns : 227 și 208.

Problema 6 (subtema 4^o la „Exerciții și probleme”,
ea și cele care urmează)

Răspuns : 282 candidați au luat calificativul „bine”.

Problema 7

Interesează restul cel mai mare la împărțirile :

$$650 : 6 = 108 \text{ (rest 2)}; \quad 650 : 7 = 92 \text{ (rest 6)}$$

Așadar, pionierii au făcut 7 straturi de flori.

Problema 8

Avem : $A = \{600; 610; 620; \dots 680; 690; 700\}$.

Se împart la 4, pe rând, toate numerele din A și apoi se grupează acelea care la împărțire au dat același rest. Se obține :

$\{600; 620; 640; 660; 680; 700\}$ care au dat restul 0 ;

$\{610; 630; 650; 670; 690\}$ care au dat restul 2.

Problema 9

Pe baza legăturii dintre deîmpărțit, împărțitor, cit și rest, avem :

$$a) \quad n = (8 \times 5) + 4; \quad n = 44$$

$$b) \quad a = (8 \times 5) + 3 \quad b = (8 \times 5) + 2 \quad c = (8 \times 5) + 1 \quad d = (8 \times 5) + 0$$

$$a = 43$$

$$b = 42$$

$$c = 41$$

$$d = 40$$

Așadar : $\{40; 41; 42; 43\}$.

c) Restul unei împărțiri trebuie să fie mai mic decât împărțitorul. Cum împărțitorul este 8, putem avea ca rest orice număr natural mai mic decât 8. Cu această observație întrebarea revine la a afla mulțimea numerelor naturale care împărțite la 8 dau citul 5 și restul mai mic decât 8, care se judecă la fel cu întrebarea anterioară. Se găsește :

$$\{40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47\}.$$

Problema 10

Restul unei împărțiri fiind mai mic decât împărțitorul :

a) la împărțirea unui număr natural prin 7 poate fi orice număr mai mic decât 7, deci :

$$\{0; 1; 2; \dots 5; 6\}$$

b) orice număr natural împărțit la 7 dă restul mai mic decât 7, deci mulțimea căutată este

$$N = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$