# Capitolul V

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME CU TOATE OPERAȚIILE STUDIATE

## 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Exercițiile vor conține și elemente simple privind ordinea operațiilor și folosirea parantezelor (fără a conține mai mult ca două operații diferite).

Pentru rezolvarea problemelor va fi folosit și planul scris de rezolvare, fără exagerări.

## 2. INDICAȚII PRIVIND REZOLVAREA UNORA DIN EXERCIȚIILE ȘI PROBLEMELE PROPUSE

**Problema 4**

Figura 110. *a)* $162 + 208 + 436 = 806$; *b)* $162 + 208 = 370$
$436 + 208 = 644$

**Problema 7**

Pentru a putea face scăderea, $x$ nu poate fi mai mic decît 246. Pentru a rămîne la scăderea $x - 246$ restul cel puțin 100, $x$ trebuie să depășească 246 cu cel puțin 100, adică poate fi un număr natural începînd cu 346. Luînd : $x = 346$ ; $x = 347$ ; $x = 348$ ; etc. și făcînd scăderile, se constată că începînd cu $x = 351$ diferența $x - 246$ devine mai mare decît 104. Așadar, avem :

*a)* {346 ; 347 ; 348 ; 349 ; 350} ; *b)* {347 ; 348 ; 349 ; 350}

*c)* {346 ; 347 ; 348 ; 349} ; *d)* {347 ; 348 ; 349}

**Problema 10**

La operațiile respective se dă rezultatul și unul din numere și se cere celălalt număr. Se găsește :

*a)* $n = 505 : 5$
$n = 101$

*c)* $n = 234 : 4$
$n = 58$, dacă „:" este împărțire cu rest ;
$n =$ nu există, dacă „:" este împărțire exactă.

*d)* $n = 500 : 4$
$n = 125$

**Problema 11**

*a)* $n = (4 \times 231) + 2$
$n = 926$

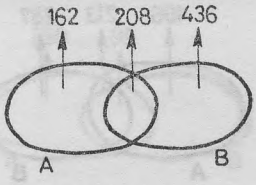

Fig. 110.

*b)* $n = (5 \times 112) + 3$
$n = 563$

*c)* $(n \times 138) + 4 = 832$
$n \times 138 = 828$
$n = 828 : 138$

Cum nu s-a învățat încă o regulă de efectuare pentru împărțirea 828 : 138 = , ea poate fi efectuată doar prin scădere repetată, găsind 828 : 138 = 6.

**Problema 12**

Se cere deîmpărțitul următoarelor împărțiri :

$a : 3 = 45$ (rest 2) ; $p : 3 = 45$ (rest 1) ; $n : 3 = 45$ (rest 0)

Avem : $a = (3 \times 45) + 2$ $p = (3 \times 45) + 1$ $n = (3 \times 45) + 0$

$a = 137$ $p = 136$ $n = 135$

**Problema 13**

Folosind relațiile de la împărțire $d = (\hat{\imath} \times c) + r$ și $r < \hat{\imath}$, avem :

*a)* $r < 3$ și $d = (3 \times 91) + r$. Înlocuind „$r$", pe rînd, cu 0, 1 și 2, găsim : $r = 0$ și $d = (3 \times 91) + 0 = 273$ obținînd $(d ; r) = 273 ; 0)$

$r = 1$ și $d = (3 \times 91) + 1 = 274$ obținînd $(d ; r) = (274 ; 1)$

$r = 2$ și $d = (3 \times 91) + 2 = 275$ obținînd $(d ; r) = (275 ; 2)$

Așadar, s-a găsit mulțimea de perechi : {(273 ; 0), (274 ; 1), (275 ; 2)}. Judecînd analog, găsim :

*b)* {(924 ; 0), (925 ; 1), (926 ; 2), (927 ; 3)}

*c)* {(630 ; 0), (631, 1), (632 ; 2), (633 ; 3), (634 ; 4)}

**Problema 17**

*a)* 196 + 213 = 409 ; 213 + 287 = 500 ; *b)* 196 + 213 + 287 = 696

**Problema 25**

Numărul muncitorilor dintr-o brigadă la deschiderea șantierului : 728 : 7 = 104.

Numărul tinerilor care au mai cerut să fie repartizați în brigăzi : 4 × 134 = 536.

În fiecare brigadă, dacă se păstrează același număr de muncitori, pot fi repartizați cel mult atîția tineri cît este cîtul împărțirii : 536 : 7 = 76 (rest 4).

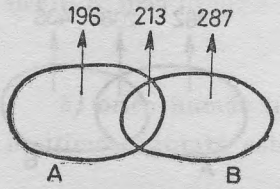

Fig. 111.

Numărul maxim de muncitori în brigadă va putea fi :

104 + 76 = 180

**Răspuns :** 180 muncitori.

**Observație :** Planul de rezolvare se va face oral.

**Problema 26**

Se împarte 204 la fiecare din numerele 2, 3, 4, 5, 7. Mulțimea căutată va conține cîturile împărțirilor care s-au făcut exact : {101 ; 68 ; 51}.

**Problema 28**

Împărțind, pe rînd, fiecare din elementele mulțimii la 4, se obține : {528 ; 816 ; 920}.

**Problema 29**

Prima rezolvare :

Aflăm costul unui set de 40 de eșarfe : $40 \times 8 = 320$.

Aflăm costul a 3 seturi : $3 \times 320 = 960$.

**Răspuns :** 960 lei.

Rezolvarea se poate scrie : $3 \times (40 \times 8) = 960$

A doua rezolvare :

Aflăm cîte eșarfe s-au cumpărat în total : $3 \times 40 = 120$.

Aflăm costul eșarfelor : $120 \times 8 = 960$.

**Răspuns :** 960 lei.

Rezolvarea se poate scrie : $(3 \times 40) \times 8 = 960$

Observăm : $3 \times (40 \times 8) = (3 \times 40) \times 8$.

**Problema 37**

Notăm cu $A$ mulțimea vacilor cu lapte și cu $B$ mulțimea vacilor mai tinere de 3 ani. Aceste mulțimi au elemente comune cele 99 de vaci sub 3 ani care sînt cu lapte. Mulțimea diferență dintre $A$ și $B$ o formează cele 250 de vaci peste 3 ani care sînt cu lapte (observăm că „toate" vacile peste 3 ani sînt cu lapte). Putem face figura 112. Din ea rezultă cu ușurință rezolvarea, dacă ținem seama că reuniunea mulțimilor $A$ și $B$ are 375 elemente :

Numărul vacilor cu lapte : $250 + 99 = 349$.

Numărul vacilor pînă la 3 ani : $375 - 250 = 125$.

Numărul vacilor care nu dau lapte : $375 - 349 = 26$.

**Răspuns :** 349 vaci cu lapte ; 125 vaci pînă la 3 ani ; 26 vaci care nu dau lapte.

**Problema 38**

Reuniunea avînd 995 elemente, figura 113 sugerează aflarea numărului elementelor mulțimii $B$ : $995 - 325 = 670$, și cel al numărului elementelor mulțimii $A$ : $325 + 78 = 403$.

De pe aceeași figură rezultă și altă rezolvare : se află mai întîi numărul elementelor lui $A$ : $325 + 78 = 403$, apoi numărul elementelor diferenței dintre $B$ și $A$ : $995 - 403 = 592$, și, în fine, numărul elementelor lui $B$ : $592 + 78 = 670$.

Prima rezolvare este mai simplă.

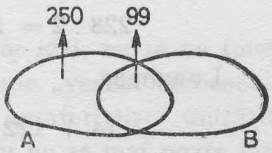

Fig. 112.

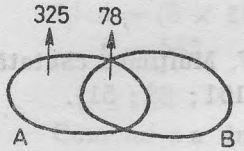

Fig. 113.

Asemănarea cu problema anterioară constă în aceea că, în amîndouă se dă numărul elementelor reuniunii a două mulțimi $A$ și $B$, numărul elementelor mulțimii diferență între $A$ și $B$ și numărul elementelor intersecției dintre $A$ și $B$. În amîndouă se cere aflarea numerelor de elemente ale mulțimilor $A$ și $B$.

**Problema 39**

$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$

$110 - 100 = 10$

**Problema 40**

Prima rezolvare

$800 + 148 = 948$

$948 : 2 = 474$

$474 - 148 = 326$

**Răspuns :** 474, respectiv 326 mineri

A doua rezolvare :

$800 - 148 = 652$

$652 : 2 = 326$

$326 + 148 = 474$

**Răspuns :** același

**Problema 44**

Este suficient a calcula de cîți bani are nevoie pentru cadouri de valoare medie, $4 \times 91 = 364$, pentru a-și da seama că cei 363 lei nu-i ajung decît pentru cadourile mai ieftine, de 85 lei bucata. Suma rămasă :

$$4 \times 85 = 340 ; \quad 363 - 340 = 23.$$

**Răspuns :** 23 lei.

**Problema 45**

Prima rezolvare

Aflăm o lungime și o lățime :

$700 : 2 = 350$

Aflăm 2 lățimi :

$350 - 122 = 228$

O singură lățime :

$228 : 2 = 114$

Lungimea

$114 + 122 = 236$

**Răspuns :** 236 m ; 114 m.

A doua rezolvare :

Aflăm o lungime și o lățime :

$700 : 2 = 350$

Aflăm 2 lungimi :

$350 + 122 = 472$

O singură lungime :

$472 : 2 = 236$

Lățimea

$236 - 122 = 114$

**Răspuns :** 236 m ; 114 m.

# Capitolul VI

# NUMERE NATURALE MAI MARI DECÎT 1000

## A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Numirea, scrierea și citirea acestor numere, după principiul sugerat la trecerea peste zece și peste sută (fără a mînui neapărat, nemijlocit mulțimi de obiecte) ; cu zece unități de un anumit ordin se formează o unitate de ordin imediat superior. Mia, ca unitate de ordinul IV ; unități de ordinul V sau „zeci de mii" ; unități de ordinul VI sau „sute de mii" ; unități de ordinul VII sau „milioane" ; etc.

Clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor. Unitățile, zecile și sutele fiecărei clase.

2. Tehnica scrierii și citirii numerelor, cunoscînd scrierea și citirea numerelor de trei cifre și numele claselor, în ordine descrescătoare. Situații particulare.

3. Compararea numerelor, cu folosirea semnelor $=$, $<$, $>$ și cu deducerea unor reguli practice, prin cercetarea cifrelor începînd cu ordinul cel mai mare.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL VI

**(Număr de ore, orientativ = 10 ore)**

Textul din manual este suficient pentru elaborarea lecțiilor.

Menționăm că *nu trebuie cerut de la elevi verbalizări obositoare, sub forma redării curgătoare a diferitelor reguli, ci se va insista asupra însușirii conștiente de către elevi a deprinderilor practice de numire, scriere și citire a numerelor naturale.*

Utilizarea efectivă, ca material didactic, a unor mulțimi de obiecte atît de numeroase ar crea dificultăți. De aceea se vor împrospăta ideile organizării unei mulțimi cu structură numerică zecimală, care au fost ilustrate obiectual pentru mulțimi cu mai puține elemente și se va sugera că procedeul poate fi extins asupra mulțimilor mai numeroase.

Pentru a ajuta gîndul copiilor în urmărirea acestor idei, nu se va folosi efectiv o mulțime de obiecte, ci învățătorul va expune „verbal" procedeul de organizare cu structură numerică zecimală, dar va „materializa" unitățile ce se presupun că rămîn dintr-un anumit ordin cu care nu se mai poate face o unitate de ordin superior (deoarece sînt mai puține de 10), punînd pe panoul 15

al trusei pentru studiul numerelor naturale atîtea discuri negre, triunghiuri albastre sau pătrate roșii, cîte unități din ordinul respectiv se presupune că au rămas.

Se obține în acest fel o mulțime model pentru structura numerică zecimală a mulțimii ipotetice analizate, care sugerează numirea, scrierea și citirea numărului ei de elemente.

Discutînd figura 50 din manual se va observa că exact informațiile care ni le furnizează această figură, ni le furnizează și scrierea existentă sub figură, luată singură. Este desigur mai comodă această scriere decît realizarea unor mulțimi model ca aceea din figură (cu piesele trusei), sau chiar numai a figurii respective. De aceea, odată procesul de gîndire împrospătat, este firesc a renunța în continuare la folosirea mulțimilor model sau a figurilor respective, utilizînd „scrierea poziațională" pentru precizarea aceloraşi informații.

Ideea fundamentală din acest capitol este aceea de a se căuta rezolvarea problemei numirii, scrierii și citirii numărului de elemente al unei mulțimi, deci o problemă „concretă", și nu de a învăța numerele naturale peste 1 000, ceea ce face să se rămînă pe un plan mult mai abstract, chiar dacă acesta este scopul final.

Ca material didactic se vor folosi planșe conținînd tabelele al 2-lea și a 3-lea existente în manual la tema „Organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală", subtema b) „Numere scrise cu mai multe cifre".

# Capitolul VII

## ADUNAREA ŞI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PESTE 1000

(Număr de ore, orientativ = 15)

### OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

1. Exerciţii numai cu doi termeni (în scris). Probleme cu date din economie.
2. Înmulţirea cu 10, 100 şi 1 000. Împărţirea la 10, 100 şi 1 000 a numerelor naturale terminate cu zerouri.

**Indicaţii privind rezolvarea unora din problemele propuse**

### TEMA 2 : SCĂDEREA FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN

**Problema 8**

Fig. 114. *a)* 4 650 — 3 220 = 1 430 ; *b)* 5 560 — 3 220 = 2 340 ;

*c)* (5 560 — 3 220) + 4 650 = 6 990 sau (4 650 — 3 220) + 5 560 = 6 990.

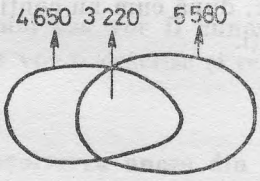


Fig. 114.

### TEMA 4 : SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ORDIN

La : Exerciţii şi probleme diverse

**Problema 3**

*a)* *B* conţine numerele din *A* care scăzute din 300 000 dau diferenţa cel puţin egală cu 150 000.

*b)* *B* conţine numerele din *A* care adunate la 999 999 dau suma cel mult egală cu 1 100 000.

**Problema 7**

| | | |
|---|---|---|
| 858 + 230 = 1 088 | 544 — 230 = 314 | 544 : 2 = 272 |
| 1 088 : 2 = 544 | 3 × 314 = 942 | 544 + 314 + 942 + + 272 = 2 072 |

În cele patru silozuri se află 2 072 q porumb.

# Capitolul VIII

## UNITĂȚI DE MĂSURĂ

(Număr de ore, orientativ = 15)

### OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Submultiplii și multiplii metrului, litrului și kilogramului, cu transformări simple. Secol (veac), an, lună, săptămînă, zi, oră, minut, secundă. Citirea orei pe ceas.

2. Exerciții și probleme.

**Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse**

### TEMA A 8-A : UNITĂȚI DE TIMP MAI MARI DECÎT O ZI

**Problema 8**

1 095 zile sau 1 096 zile, după cum perioada de 3 ani consecutivi nu conține în ea, sau conține, un an bisect. Trei ani neconsecutivi pot conține 1 095, 1 096, 1 097 sau 1 098 de zile, după cum nu conține nici un an bisect, conține unul, doi sau trei ani bisecți.

# Capitolul IX

## NOȚIUNI DE GEOMETRIE

**(Număr de ore, orientativ = 15)**

## OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

**1.** Recapitularea noțiunilor studiate în clasa a II-a, cu aplicații la unitățile de măsură studiate și la operațiile asupra numerelor.

**2.** Compararea segmentelor de dreaptă.

**3.** Semidreapta. Unghiul, compararea unghiurilor. Unghi drept, drepte perpendiculare, echerul. Unghi ascuțit, unghi obtuz.

**4.** Poziții a două drepte : concurente ; paralele.

**5.** Poligoane : triunghiul, patrulaterul. Clasificarea patrulaterelor : paralelogramul ; dreptunghiul ; pătratul.

**6.** Aria unei suprafețe. Unități de arie : $cm^2$ ; $m^2$, $hm^2$ sau ha. Aria dreptunghiului și pătratului.

**Notă :** Noțiunile de mai sus vor fi cunoscute intuitiv, fără definiții riguroase. Figurile respective vor fi descrise și recunoscute în mediul înconjurător.

### Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse

### TEMA A 3-A : SEMIDREAPTA

**Problema 4**

Drepte : $AD$. Semidrepte : $BA$ ; $BD$ ; $CA$ ; $CD$. Segmente : $BC$.

**Problema 5**

Figura 82. Drepte : $AC$ ; $DB$. Semidrepte : $OA$ ; $OC$ ; $OD$ ; $OB$. Segmente : nu sînt. Fig. 83. Drepte : $AD$ ; $FC$ ; $EB$. Semidrepte : $IA$ ; $ID$ ; $IF$ ; $IC$ ; $IE$ ; $IB$. Segmente : nu sînt.

### TEMA A 4-A : UNGHIUL

**Problema 6 (subtema 1°)**

Laturile unghiurilor fiind semidrepte, acestea sînt nesfîrșit de lungi, neavînd importanță ce porțiune din ele este desenată. Așadar, nu putem spune că vreunul din cele trei unghiuri are laturile mai lungi ca celelalte.

# Capitolul X

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

**(Număr de ore, orientativ = 10)**

**Problema 6**

{102 030 ; 103 020 ; 201 030}

**Problema 8**

Fig. 115 sugerează : 50 606 + 10 066 = 60 62 ;

39 034 + 10 066 = 49 100.

**Problema 9**

Fig. 116 sugerează : 250 025 — 75 075 = 174 950.

**Problema 13**

Prin încercări : *a)* {2 ; 3 ; . . . ; 6 ; 7} ; *b)* {2 ; 3 ; . . . ; 7 ; 8} *c)* {4 ; 5 ; 6} ; *d)* {3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}.

**Problema 19**

Fig. 117. Intersecția mulțimilor $A$ și $B$ are 400 051 — (300 510 + 46 069) elemente, adică 53 832. Mulțimea $A$ are 300 150 + 53 832 elemente, iar mulțimea $B$ are 46 069 + 53 832 elemente, adică, respectiv 353 982 și 99 901. Avem 453 883 — 400 051 = 53 832. Deci suma numerelor de elemente din $A$ și $B$ este mai mare ca numărul elementelor reuniunii, cu numărul elementelor intersecției lui $A$ cu $B$.

**Problema 29**

Asemănător cu problemele 26 și 27

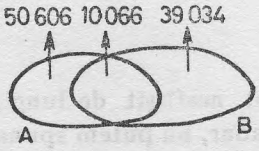


Fig. 115.

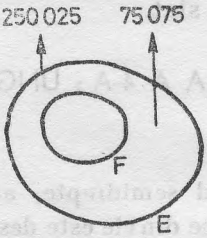


Fig. 116.

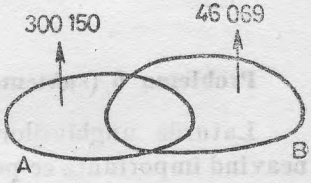


Fig. 117.

**Problema 32**

$(7 \times 100) + (3 \times 50) + (6 \times 25) = 1000$ ; $1000 - 990 = 10$. Va primi rest 10 lei.

| | model | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 leu | 10 | 7 | 4 | 2 | 1 | 5 | — |
| 3 lei | — | 1 | 2 | 1 | 3 | — | — |
| 5 lei | — | — | — | 1 | — | 1 | 2 |

**Problema 34**

Fiecare ladă conține $60 : 5 = 12$ sticle. Luîndu-se din una 8, din alta 4 și din a treia 12 sticle, rămîn, respectiv 4, 8 și 0 sticle. În două lăzi luate la întîmplare pot fi : 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 sau 24 sticle.

**Problema 35**

$375 : 3 = 125$ ; $5 \times 125 = 625$ ; $700 - 625 = 75$. Se va primi rest 75 lei. El poate fi plătit cu 1 bancnotă a 50 lei și 1 bancnotă a 25 lei, dîndu-se astfel cel mai mic număr de bancnote, adică 2. Pentru a se plăti cu cel mai mare număr de bancnote se va da 1 bancnotă de 25 lei, și 5 bancnote a cîte 10 lei, total 6 bancnote.

**Problema 36**

$\{1 ; 3 ; 5\}$ reunită cu $\{6 ; 8\}$ face mulțimea $\{1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8\}$. 40 se împarte exact la : 1 ; 5 ; 8, iar 30 se împarte exact la : 1 ; 3 ; 5 ; 6.

**Problema 37**

*a)* Din primul val face piese care necesită 3 m sîrmă, din al doilea face piese care necesită 2 m sîrmă, iar din al treilea val, piese care necesită 2 m sîrmă. În total îi rămîne o bucată de 1 m sîrmă (din valul al treilea).

*b)* Din primul val piese a 3 m sîrmă, din al doilea val piese a 2 m sîrmă, iar din al treilea val face 41 piese a 3 m sîrmă și 1 piesă a 2 m. Astfel folosește toată sîrma, realizînd 137 piese.

*c)* Din primul val face 54 piese a 2 m sîrmă și 1 piesă a 3 m. Din al doilea val face 58 piese a 2 m sîrmă. Din al treilea val face 61 piese a 2 m sîrmă și una piesă a 3 m sîrmă. Astfel realizează numărul maxim de piese, 175, consumînd toată sîrma.

Cele de mai sus se deduc analizînd resturile și cîturile împărțirilor la 2 și 3 a fiecăruia din numerele 111, 116 și 125.

**Problema 38**

Primul mod: $421 + 230 + 275 = 926$; $926 : 7 = 132$ (rest 2).

S-au făcut 132 transporturi cu camioane de 7 t, iar 2 t au fost transportate cu un mijloc de transport mai mic.

Al doilea mod: $421 : 7 = 60$ (rest 1); $230 : 7 = 32$ (rest 6); $275 : 7 = 39$ (rest 2); $1 + 6 + 2 = 9$; $9 : 7 = 1$ (rest 2); $60 + 32 + 39 + 1 = 132$.

Acelaşi rezultat.

**Problema 42**

*a)* $A = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}\}$; $D = \{\widehat{RVT}; \widehat{SVP}$; $O = \{\widehat{RVP}\}$;

*b)* $B = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVT}; \widehat{SVP}; \widehat{RVP}\}$;

*c)* $C = \{\widehat{RVT}; \widehat{SVP}; \widehat{RVP}\}$;

*d)* $E = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVP}\}$;

*e)* $F = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVT}; \widehat{SVP}\}$

**Problema 43**

*a)* Reuniunea lui $A$ cu $D$: $\{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVT}; \widehat{SVP}\}$.

*b)* Reuniunea lui $A$ cu $O$: $\{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVP}\}$.

*c)* Reuniunea lui $D$ cu $O$: $\{\widehat{RVT}; \widehat{SVP}; \widehat{RVP}\}$.

*d)* Intersecţia lui $E$ cu $F$: $\{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}\}$.

Se constată că aceste mulţimi sînt formate, respectiv, exact din aceleaşi elemente ca şi mulţimile $F$, $E$, $C$ şi $A$ din problema anterioară.

# Capitolul XI

# RELAŢII, FUNCŢII, OPERAŢII

Acest capitol cuprinde cunoştinţe neconţinute în programă şi manual. El este destinat informării învăţătorilor asupra cîtorva din noţiunile fundamentale care constituie suportul ştiinţific al matematicii predate în învăţămîntul primar.

Asemenea cunoştinţe vor permite învăţătorilor să-şi elaboreze lecţiile într-o viziune nouă, de mare perspectică, şi să explice simplu, dar în acord cu matematica actuală, principalele noţiuni pe care le transmit elevilor.

În prelucrarea didactică s-a realizat o atît de pronunţată simplificare, încît, deşi este păstrată esenţa ştiinţifică, înţelegerea să nu fie condiţionată de existenţa nici unui fel de cunoştinţe anterioare de matematică.

Întrucît în forma în care este prezentat, capitolul a fost predat, eşalonat, la elevi de clasa a III-a şi a IV-a (clase compacte, atît din mediul rural cît şi urban), obţinîndu-se rezultate bune, el poate constitui obiect al preocupărilor în cadrul cercurilor de elevi.

## 1. CORESPONDENŢA „ÎNTRE" MULŢIMI

Radu, Andrei, Costel şi Vlad şi-au petrecut vacanţa la Predeal, prietenii lor Sandu, Mihai şi Dan şi-au petrecut-o la Eforie.

În perioada vacanţei cele două grupe de copii au păstrat legătura între ele prin intermediul următoarelor scrisori : Radu a scris lui Mihai şi Dan ; Mihai a scris lui Costel ; Vlad a scris lui Dan.

**Corespondenţa** stabilită în acest fel **între mulţimea P** a celor patru elevi aflaţi la Predeal şi **mulţimea E** a celor trei elevi aflaţi la Eforie *este ilustrată prin diagrama alăturată :*

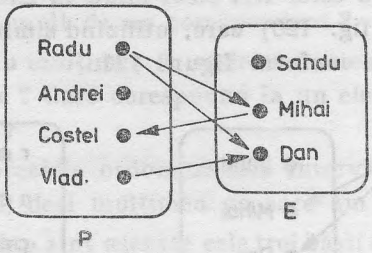


Fig. 118.

numită **diagrama cu săgeţi** a corespondenţei între mulţimile *P* şi *E* stabilită mai sus.

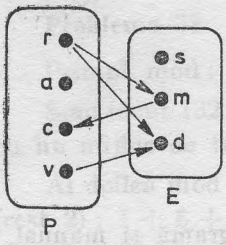

Fig. 119.

Fiecare scrisoare determină un cuplu sau o *pereche ordonată, formată din elementul de la care pleacă* şi *elementul la care soseşte* acea scrisoare. Se formează astfel perechile ordonate :

(Radu, Mihai), (Radu, Dan), (Mihai, Costel), (Vlad, Dan).

Observăm că perechile ordonate (Radu, Mihai) şi (Mihai, Radu) nu sînt egale, deoarece într-un caz scrisoarea merge de la Radu la Mihai şi în al doilea invers, de la Mihai la Radu. Deci :

(*Radu, Mihai*) $\neq$ (*Mihai, Radu*)

*Corespondenţa între mulţimile P şi E este determinată de corespondenţele stabilite de la un element la un element şi ilustrate pe figura de mai sus prin cîte o săgeată. Se vede că sensul acestora poate fi de la P la E şi de la E la P.*

Notînd fiecare copil cu iniţiala prenumelui său (literă mică), putem scrie mulţimile $P$ şi $E$ astfel :

$$P = \{r, a, c, v\} ; E = \{s, m, d\}.$$

iar perechile ordonate determinate de fiecare scrisoare şi care alcătuiesc corespondenţa între mulţimile $P$ şi $E$ :

$$(r, m), (r, d), (m, c), (v, d)$$

Diagrama cu săgeţi a corespondenţei între mulţimile $P$ şi $E$ poate fi făcută ca în figura 119.

## 2. CORESPONDENŢA DE LA O MULŢIME LA O MULŢIME SAU RELAŢIA DE LA O MULŢIME LA O MULŢIME

În exemplul anterior să presupunem că cele două grupe de copii au păstrat legătura prin intermediul următoarelor scrisori : Radu a scris lui Mihai şi Dan ; Vlad a scris lui Dan.

Corespondenţa stabilită între mulţimea $P$ a celor patru elevi aflaţi la Predeal şi mulţimea $E$ a celor trei elevi aflaţi la Eforie este ilustrată prin diagrama cu săgeţi (v. fig. 120) care, utilizînd simbolurile folosite mai sus pentru elemente, se face conform figurii 121.

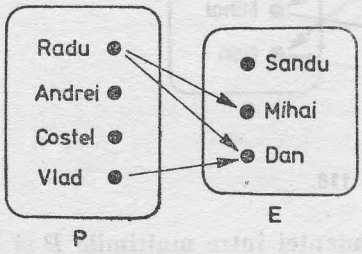

Fig. 120.

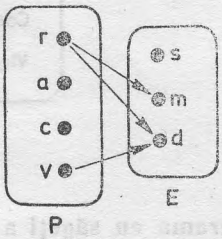

Fig. 121.

De data aceasta *corespondențele de la un element la un element au toate aceeași orientare, plecînd de la cîte un element din P, către un element din E.* Corespondența între două mulțimi care are această particularitate se numește **corespondență de la o mulțime la o mulțime,** în cazul nostru de la $P$ la $E$. O vom mai numi și **relație de la mulțimea P la mulțimea E.**

Mulțimea $P$ o vom numi **mulțime de plecare,** iar mulțimea $E$ o vom numi **mulțime de sosire** a acestei relații.

*Mulțimea G a tuturor cuplurilor care intervin în relația obținută* mai sus de la P la E este :

$G = \{$(Radu, Mihai), (Radu, Dan), (Vlad, Dan)$\}$ care, utilizînd simbolurile folosite pentru elemente, se scrie :

$$G = \{(r, m), (r, d), (v, d)\}$$

Această mulțime de cupluri se numește **graful relației** ce s-a realizat de la $P$ la $E$, prin intermediul scrisorilor menționate.

Sintetizînd cele de mai sus putem spune că *o relație este perfect cunoscută dacă cunoaștem mulțimea de plecare,* în cazul nostru $P$, *mulțimea de sosire,* în cazul nostru $E$, *și mulțimea G* a tuturor cuplurilor care intervin în acea relație, formate cu primul element din $P$ și al doilea din $E$, deci *graful relației.* Altfel spus, o relație este perfect cunoscută dacă cunoaștem *tripletul (P, E, G),* în care cele trei mulțimi sînt scrise în ordinea menționată anterior.

**Probleme**

**1.** Se dau mulțimile de figuri :

$A = \{$○, △, ▭$\}$ ; $B = \{$▨, ⊘, ▨, ⊗, ▩$\}$

*a)* Stabiliți acea relație de la $A$ la $B$ care pune în corespondență fiecare element din $A$ cu toate elementele din $B$ care au aceeași formă cu el, folosind diagrama cu săgeți.

*b)* Care este mulțimea de plecare și care este mulțimea de sosire în relația obținută ?

*c)* Care elemente din mulțimea de plecare nu au corespondent în mulțimea de sosire ? Care au mai mult de un corespondent ?

*d)* Care elemente din mulțimea de sosire nu corespund la nici un element din mulțimea de plecare ? Care corespound la un element ? Care corespunde la mai multe elemente ?

*e)* Scrieți totate perechile ordonate care intervin în relația pe care ați stabilit-o de la $A$ la $B$, deci mulțimea pe care am numit-o graful relației.

**2.** Pe un raft în dulap sînt așezate cele trei băști existente într-o locuință. Notînd fiecare basică cu o literă, mulțimea $B$ a băștilor de pe raft se poate scrie, de exemplu :

$$B = \{o, r, s\}.$$

Mulțimea $P$ a persoanelor din acea locuință este formată din tata, mama, un băiat și o fetiță, persoane pe care le notăm, respectiv, cu $t$, $m$, $b$ și $f$. Avem :

$$P = \{t, m, b, f\}.$$

Știind că tata poartă basca notată cu $r$, băiatul și fetița poartă, alternativ, băștile notate cu $o$ și $s$, iar mama nu poartă bască :

*a)* faceți diagrama cu săgeți a relației de la mulțimea $P$ a persoanelor la mulțimea $B$ a băștilor, obținută dacă punem în corespondență fiecare persoană cu basca pe care o poartă.

*b)* Scrieți mulțimea de cupluri care intervin în această relație (deci graful relației). Faceți diagrama acestei mulțimi.

*c)* Care element din mulțimea de plecare nu are corespondent în mulțimea de sosire ? Care are un corespondent ? Care are mai mult decît un corespondent ?

*d)* Care element din mulțimea de sosire nu este corespondent pentru nici un element din mulțimea de plecare ? Care este corespondent pentru un singur element din mulțimea de plecare ? Care este corespondent pentru mai mult de un element din mulțimea de plecare ?

*e)* Formați toate cuplurile ce au elementul de plecare în $P$ și cel de sosire în $B$, și care nu aparțin grafului relației stabilite anterior.

*f)* Refaceți răspunsul la întrebarea (a), în situația cînd fiecare persoană din familie poartă, alternativ, toate băștile.

**3.** Onuț, Nicu și Dan participă la un concurs de tir. Ei trebuie să tragă cîte un glonte în fiecare din cele patru ținte, constînd din figurine decupate din carton care reprezintă, respectiv, un mistreț, o vulpe, o bufniță și o potîrniche.

*a)* Indicați de la care trăgător la care țintă s-au îndreptat gloanțele în timpul desfășurării concursului, întocmind o diagramă cu săgeți ce pleacă de la mulțimea $C$ a concurenților la mulțimea $T$ a țintelor.

*b)* Scrieți mulțimea cuplurilor trăgător-țintă determinate de fiecare glonț tras la concurs.

*c)* Prin intermediul gloanțelor trase, ce fel de corespondență s-a stabilit : Între o mulțime și o mulțime ? De la o mulțime la o mulțime ?

*d)* Dacă s-a realizat o relație de la o mulțime la o mulțime, ce reprezintă mulțimea formată la (b) pentru această relație ? Faceți diagrama mulțimii obținute la (b).

*e)* Formați mulțimea tuturor cuplurilor care au elementul de plecare în mulțimea $C$ a concurenților și cel de sosire în mulțimea $T$ a țintelor, și care nu aparțin grafului relației stabilite anterior.

**Observația 1**

*Mulțimea tuturor cuplurilor ce pot fi formate astfel încît primul lor element să aparțină mulțimii $A$ și al doilea să aparțină mulțimii $B$ se numește produsul cartezian al mulțimii $A$ prin mulțimea $B$ și se notează $A \times B$.*

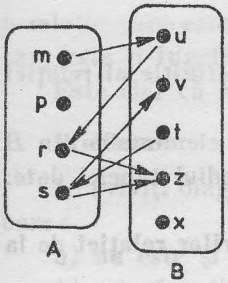


Fig. 122.

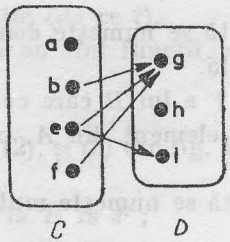


Fig. 123.

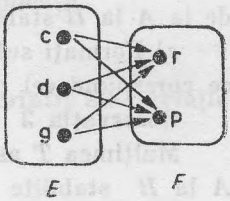


Fig. 124.

Notînd fiecare concurent şi fiecare ţintă, respectiv, cu iniţialele numelui lor, avem :

$$C = \{o, n, d\} \text{ şi } T = \{m, v, b, p\}$$

iar graful relaţiei de la (c) :

$C \times T = \{(o, m), (o, v), (o, b), (o, p), (n, m), (n, v), (n, b), (n, p), (d, m), (d, v), (d, b), (d, p)\}$.

Această mulţime este numită produsul cartezian al mulţimii $C$ prin mulţimea $T$.

**4.** Priviţi corespondenţele între mulţimi stabilite prin intermediul figurilor : 122 ; 123 ; 124.

*a)* Spuneţi care din ele este în acelaşi timp şi corespondenţă de la o mulţime sau relaţie ?

*b)* Scrieţi graful fiecărei relaţii găsite la (a).

*c)* Care din mulţimile de cupluri obţinute la (*b*) reprezintă produsul cartezian al unei mulţimi printr-o mulţime ? (Justificaţi).

**5.** Pentru mulţimile de litere :

$$A = \{m, p, r, s\} \; ; \; B = \{c, d, f, h, k\}$$

tabela de mai jos pune în corespondenţă elementele mulţimii $A$ cu acele elemente din mulţimea $B$ care sînt scrise sub ele în tabelă :

| $A$ | $m$ | $p$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | $c$ | $d$ | $f, h$ | $k$ |

*a)* Faceţi diagrama cu săgeţi a relaţiei de la $A$ la $B$ stabilite cu ajutorul tabelei.

*b)* Scrieţi graful acestei relaţii.

*c)* Faceţi diagrama mulţimii obţinute la (*b*).

*d)* Formaţi submulţimea $E$ a lui $A$ care conţine toate elementele din $A$ care au corespondent în $B$ prin intermediul tabelei de mai sus.

**Observaţia 2**

Mulţimea $E$ astfel obţinută se numeşte **domeniul de definiţie al relaţiei** de la $A$ la $B$ stabilit de tabelă.

*e)* Formaţi submulţimea $T$ a lui $B$ care conţine toate elementele din $B$ ce corespund cel puţin la un element din $A$, prin intermediul tabelei date.

**Observaţia 3**

Mulţimea $T$ astfel obţinută se numeşte **mulţimea valorilor relaţiei** de la $A$ la $B$ stabilite de tabelă.

6. Revedeţi problema (4) de mai sus, punctul (a). Pentru fiecare relaţie ilustrată de figuri, scrieţi :

*a)* mulţimea de plecare ;

*b)* mulţimea de definiţie a relaţiei ;

*c)* mulţimea de sosire ;

*d)* mulţimea valorilor relaţiei.

## 3. FUNCŢII. APLICAŢII

Priviţi relaţiile de la mulţimea $A = \{c, d, e, f\}$ la mulţimea $B = \{m, s, r, h, g\}$, date prin diagramele (1), (2) şi (3).

În relaţia (1) există elementele $c$ şi $f$ din mulţimea de plecare care au mai mult ca un corespondent în mulţimea de sosire ($c$ are pe $m$ şi $r$ ; $f$ are pe $r$, $h$ şi $g$).

*Relaţiile* ca (2) şi (3) *în care nici un element din mulţimea de plecare nu are mai mult decît un corespondent în mulţimea de sosire se numesc* **funcţii.**

În diagrama cu săgeţi a unei funcţii, de la nici un element al mulţimii de plecare nu poate pleca mai mult ca o săgeată (eventual pot exista elemente de la care să nu plece nici una).

*Funcţiile* ca (3) *în care fiecare element al mulţimii de plecare are un corespondent în mulţimea de sosire se numesc* **aplicaţii.**

Se vede că funcţiile sînt relaţii particulare, iar aplicaţiile sînt funcţii particulare. În (1) avem o relaţie fără să avem o funcţie (de ce ?). În (2) avem

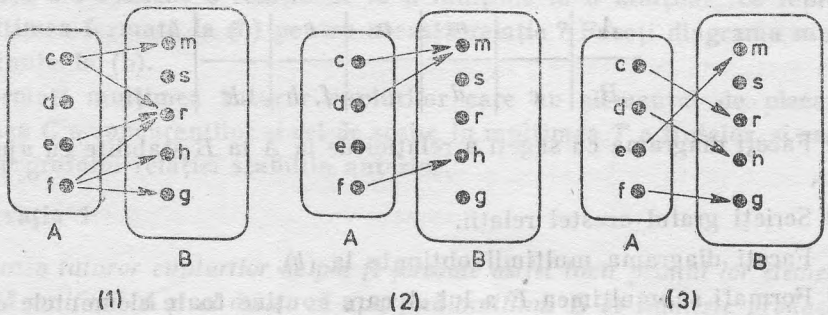


Fig. 125.

o relație care este în același timp și funcție (de ce) ? În (3) avem o relație care este și funcție de aplicație (de ce ?).

Este clar că relațiile care nu sînt funcții, nu pot fi aplicații.

**Probleme**

**1.** Priviți diagramele (1), (2), și (3) din fig. 126. Găsiți printre ele o relație care :

*a)* nu este și funcție de la $E$ la $F$ ;

*b)* este funcție fără a fi aplicație ;

*c)* este și funcție și aplicație.

**2.** Se cunosc $A = \{d, f, g\}$, $B = \{p, s, u\}$ și $C = \{(d, p), (d, u), (f, u), (g, s)\}$ ; $R = \{(d, p), (f, p), (g, u)\}$ ; $T = \{(d, p), (f, s)\}$.

*a)* Faceți diagramele cu săgeți a corespondențelor între mulțimile $A$ și $B$ stabilite de fiecare din mulțimile de cupluri $C$, $R$, $T$.

*b)* Care din corespondențele stabilite la (a) reprezintă relații, care reprezintă funcții și care reprezintă aplicații de la mulțimea $A$ la mulțimea $B$ ?

*c)* Scrieți mulțimea de definiție și mulțimea valorilor fiecăreia din relațiile găsite la (b).

*d)* Pentru care din relațiile găsite la (b) avem : mulțimea de plecare egală cu mulțimea de definiție ; mulțimea de sosire egală cu mulțimea valorilor.

**3.** Fie $E$ mulțimea elevilor dintr-o sală de clasă și $B$ mulțimea băncilor cu două locuri din acea sală de clasă. Punînd în corespondență fiecare elev cu banca în care stă, să se spună dacă relația de la $E$ la $B$ care se obține este și funcție, sau aplicație, în situațiile :

*a)* fiecare elev stă într-o bancă, existînd și locuri libere ;

*b)* fiecare elev stă într-o bancă, neexistînd locuri libere ;

*c)* există elevi în picioare, nu sînt locuri libere ;

**4.** Fie $P$ mulțimea persoanelor care vizionează un film într-o sală de cinematograf și $S$ mulțimea scaunelor (cu un loc) din acea sală.

Punînd în corespondență fiecare persoană cu scaunul pe care îl ocupă, spuneți dacă relația de la $P$ la $S$ care se obține este funcție sau aplicație, în situațiile :

*a)* unii spectatori stau în picioare, neexistînd locuri libere ;

*b)* nu există spectatori în picioare, dar sînt locuri libere.

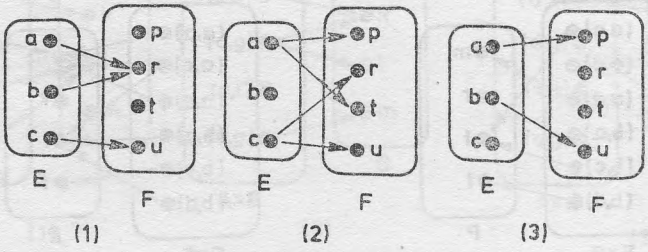


Fig. 126.

*c)* Cum se modifică răspunsurile de mai sus, dacă printre spectatori există și copii mici care se așază cîte doi pe același scaun?

5. În problema anterioară puneți în corespondență fiecare scaun cu spectatorul care îl ocupă și analizați relațiile de la $S$ la $P$ care se obțin, în cele două situații menționate.

## 4. OPERAȚII BINARE

Fie mulțimile:

$$E = \{a, b\}; F = \{a, c, d\}; P = \{m, r, t, f\}.$$

Formăm mulțimea produs cartezian a lui $E$ prin $F$:

$$E \times F = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\}.$$

Folosind diagramele cu săgeți, figura 127 stabilește o funcție de la mulțimea produs $E \times F$ la mulțimea $P$.

Privind figura observăm că ea stabilește următoarele corespondențe de la elementele din $E \times F$ la elementele din $P$:

$(a, a) \longrightarrow t$ $\qquad$ $(b, c) \longrightarrow t$

$(a, d) \longrightarrow m$ $\qquad$ $(b, d) \longrightarrow f.$

**O funcție,** ca cea de mai sus, **la care mulțimea de plecare este produsul cartezian a două mulțimi, se numește operație binară.** În cazul nostru operația este stabilită între mulțimile $E$ și $F$, cu valori în mulțimea $P$ (Pe scurt, vom zice doar „operație").

Folosind diagramele cu săgeți, figura 128 stabilește o altă operație între mulțimile $E$ și $F$, cu valori în mulțimea $P$. Ea stabilește următoarele corespondențe de la elemente din $E \times F$ la elemente din $P$:

$(a, a) \longrightarrow m$ $\qquad$ $(b, a) \longrightarrow t$

$(a, c) \longrightarrow t$ $\qquad$ $(b, c) \longrightarrow f$

$(a, d) \longrightarrow m$ $\qquad$ $(b, d) \longrightarrow t.$

Se observă că *operația dată* prin figura 127 *este o funcție, fără a fi și o aplicație* a lui $E \times F$ în $P$. În adevăr, cuplurile $(a, c)$ și $(b, a)$ din $E \times F$ nu

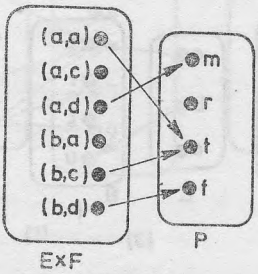

Fig. 127.

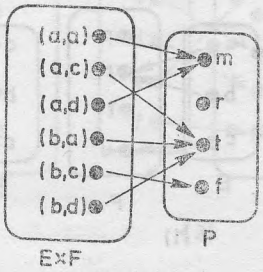

Fig. 128.

au corespondent în $P$. O astfel de operație între mulțimile $E$ și $F$ *zicem* **că nu este totdeauna posibilă.**

Dimpotrivă, *operația dată* prin figura 128 este o funcție care în același timp *constituie o aplicație* a lui $E \times F$ în $P$. În adevăr, în $E \times F$ nu rămîne nici un element fără corespondent în $P$. O astfel de operație între mulțimile $E$ și $F$ *zicem* **că este totdeauna posibilă.**

**Probleme**

**1.** Fie mulțimile : $A = \{d, e\}$ ; $B = \{f, g\}$ ; $C = \{k, l, m\}$.

Spuneți care din figurile (1), (2), și (3) stabilesc :

*a)* Operații între mulțimile $A$ și $B$ cu valori în mulțimea $C$ ;

*b)* operații între $A$ și $B$ cu valori în $C$, care : nu sînt totdeauna posibile ; sînt totdeauna posibile. Justificați.

**2.** Se dau mulțimile $A = \{r, p, t\}$ ; $B = \{u, d\}$ ; $C = \{f, g, l\}$

Folosind diagramele cu săgeți stabiliți cîte două operații între mulțimile $A$ și $B$ cu valori în mulțimea $C$ (fiecare pe altă figură), care :

*a)* Să fie totdeauna posibile ; *b)* să nu fie totdeauna posibile.

**3.** Pentru mulțimile $A$, $B$ și $C$ de la problema anterioară, faceți diagramele cu săgeți care stabilesc operațiile între $A$ și $B$ cu valori în $C$, care conțin următoarele corespondențe de la elemente din $A \times B$ la elemente din $C$ :

*a)* $(r, u) \longrightarrow f$ $\quad$ $(t, u) \longrightarrow l$

$(p, d) \longrightarrow l$ $\quad$ $(t, d) \longrightarrow f$

*b)* $(r, u) \longrightarrow f$ $\quad$ $(p, u) \longrightarrow g$ $\quad$ $(t, u) \longrightarrow l$

$(r, d) \longrightarrow f$ $\quad$ $(p, d) \longrightarrow g$ $\quad$ $(t, d) \longrightarrow l$

Care operație este totdeauna posibilă și care nu ?

**4.** Ana, Vlad și Radu iau lecții de pian și dans la școala populară de artă, putînd primi la sfîrșitul anului școlar calificative de la „foarte bine" la „nesatisfăcător", la fiecare din cele două discipline.

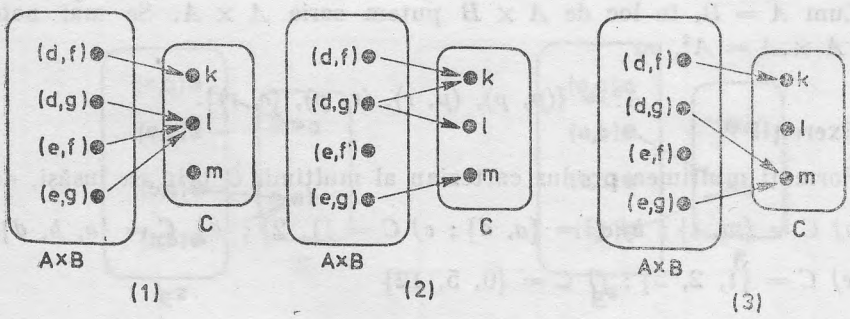


Fig. 129.

Notînd cu $E$ mulțimea elevilor, cu $D$ mulțimea disciplinelor de studiu și cu $C$ mulțimea calificativelor, iar fiecare element al acestor mulțimi cu inițiala denumirii sale, avem :

$$E = \{a, v, r\}; \quad D = \{p, d\}; \quad C = \{f, b, s, n\}.$$

Rezultatele la sfîrșitul anului școlar sînt cuprinse în tabela :

| | $p$ | $d$ |
|---|---|---|
| $a$ | $f$ | $s$ |
| $v$ | $n$ | $b$ |
| $r$ | $b$ | $b$ |

În esență, tabela face să corespundă fiecărui cuplu elev-disciplină, un calificativ :

$$(a, p) \longrightarrow f \qquad (v, p) \longrightarrow n \qquad (r, p) \longrightarrow b$$

$$(a, d) \longrightarrow s \qquad (v, d) \longrightarrow b \qquad (r, d) \longrightarrow b.$$

Folosind diagramele cu săgeți, arătați că prin intermediul tabelei s-a stabilit o operație binară între mulțimile $E$ și $D$, cu valori în $C$.

Această operație este totdeauna posibilă, sau nu ?

## 5. OPERAȚII INTERNE BINARE ÎNTR-O MULȚIME

### 1. PRODUSUL CARTEZIAN AL UNEI MULȚIMI PRIN EA ÎNSĂȘI

Să scriem produsul cartezian al mulțimii $E$ prin mulțimea $F$, dacă :

$$E = \{a, b\}; \; F = \{a, c, d\}.$$

Avem :

$$E \times F = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\}$$

În mod asemănător putem forma produsul cartezian al mulțimii $A$ prin mulțimea $B$, dacă : $A = \{p, r\}$, $B = \{p, r\}$.

Avem :

$$A \times B = \{(p, p), (p, r), (r, p), (r, r)\}$$

Observînd că mulțimile $A$ și $B$ sînt egale, urmează că, în fond, am scris mulțimea produs cartezian al mulțimii $A$ prin ea însăși.

Cum $A = B$, în loc de $A \times B$ putem scrie $A \times A$. Se mai notează încă $A \times A = A^2$, cu

$$A^2 = \{(p, p), (p, r), (r, p), (r, r)\}.$$

**Exerciții**

Formați mulțimea produs cartezian al mulțimii $C$ prin ea însăși, dacă :

*a)* $C = \{m, t\}$ ; *b)* $C = \{a, d\}$ ; *c)* $C = \{1, 2\}$ ; *d)* $C = \{a, b, d\}$ ;

*e)* $C = \{1, 2, 3\}$ ; *f)* $C = \{0, 5, 12\}$

Faceți diagrama mulțimii $C^2$, în fiecare caz.

Fie mulţimea $E$ de litere : $E = \{a, b\}$.

Mulţimea produs cartezian al mulţimii $E$ prin ea însăşi este :

$$E^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Faceţi diagramele mulţimilor $E^2$ şi $E$, ca în figura 130. Stabiliţi apoi cu ajutorul săgeţilor o corespondenţă de la $E^2$ la $E$ care să fie o funcţie. Să zicem că aţi obţinut figura 131.

*Funcţia care are particularitatea de a avea ca mulţime de plecare chiar mulţimea produs cartezian al mulţimii de sosire prin ea însăşi se numeşte* **operaţie internă binară** *în mulţimea de sosire.*

În exemplul de mai sus figura 131 stabileşte o operaţie internă binară în mulţimea $E$.

Figurile 132, 133 şi 134 stabilesc alte operaţii interne binare în mulţimea $E$.

*Operaţia internă binară se numeşte* **totdeauna posibilă** *dacă funcţia care o determină este şi aplicaţie. În cazul în care funcţia respectivă nu este şi aplicaţie, operaţia internă binară zicem că* **nu este totdeauna posibilă.**

Figurile 131, 132 şi 134 stabilesc operaţii interne binare în mulţimea $E$ care nu sînt totdeauna posibile. Figura 133 stabileşte o operaţie internă binară totdeauna posibilă în $E$. (Justificaţi).

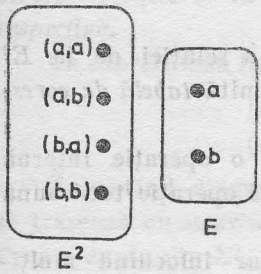


Fig. 130.

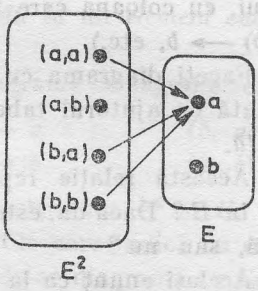


Fig. 131.

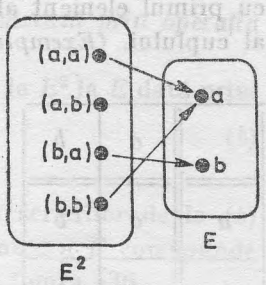


Fig. 132.

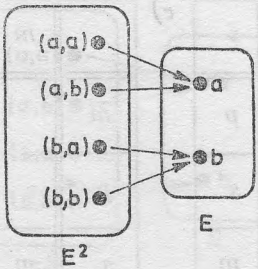


Fig. 133.

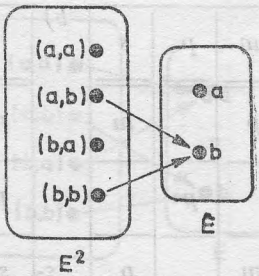


Fig. 134.

**Exerciţii şi probleme**

1. Stabiliţi, folosind diagrame cu săgeţi, două operaţii interne binare totdeauna posibile în mulţimea $E = \{a, b\}$, diferite de aceea din figura 133.

2. Stabiliţi, folosind diagrame cu săgeţi, două oprаţii interne binare ce nu sînt totdeuna posibile în mulţimea $E = \{a, b\}$, diferite de cele din figurile 131, 132, şi 134.

3. Se dă mulţimea de litere $F = \{m, p, r\}$. Folosind diagrame cu săgeţi, stabiliţi :

*a)* trei operaţii interne binare în $F$, totdeauna posibile ;

*b)* trei operaţii interne binare în $F$ care să nu fie totdeauna posibile.

4. Se dă mulţimea $P$ de numere : $P = \{1, 2\}$. Faceţi diagrama cu săgeţi a relaţiei prin care se realizează următoarele corespondenţe de la elemente din $P^2$ la elemente din $P$:

$$(1, 1) \longrightarrow 1 ; \quad (1, 2) \longrightarrow 2 ; \quad (2, 2) \longrightarrow 1.$$

Este aceasta o operaţie internă binară în $P$ ? Dacă da, este ea totdeauna posibilă, sau nu ?

5. Acelaşi enunţ ca la problema (5), în care se înlocuiesc cele trei corespondenţe cu :

$$(1, 1) \longrightarrow 2 ; \quad (1, 2) \longrightarrow 1 ; \quad (2, 1) \longrightarrow 2 ; \quad (2,2) \longrightarrow 1.$$

6. Fie mulţimea $E = \{a, b\}$. Tabela alăturată face să corespundă unor cupluri din $E^2$ acel element din $E$ care este scris la intersecţia liniei care începe cu primul element al cuplului, cu coloana care începe cu al doilea element al cuplului. (*Exemplu :* $(a, b) \longrightarrow b$, etc.).

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | | $b$ |

*a)* Faceţi diagrama cu săgeţi a relaţiei de la $E^2$ la $E$ dată cu ajutorul tabelei, numită *tabelă de corespondenţă.*

*b)* Această relaţie reprezintă o operaţie internă binară în $E$ ? Dacă da, este această operaţie totdeauna posibilă, sau nu ?

7. Acelaşi enunţ ca la (7), dar înlocuind mulţimea $E$ cu $F = \{m, p, s\}$ şi tabela prin :

*a)*

| | $m$ | $p$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| $m$ | $p$ | | $m$ |
| $p$ | | $p$ | |
| $s$ | $m$ | | $p$ |

*b)*

| | $m$ | $p$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| $m$ | $m$ | $s$ | $p$ |
| $p$ | $p$ | $m$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $p$ | $m$ |

*c)*

| | $m$ | $p$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| $m$ | | $s$ | $m$ |
| $p$ | $s$ | | $p$ |
| $s$ | $m$ | $p$ | |

## 3. DIVERSE MODURI DE PRECIZARE A UNEI OPERAȚII

În cele ce urmează ne limităm la operațiile interne binare într-o mulțime, dar cele spuse pot fi extinse la orice operație.

Fie mulțimea : $E = \{a, b\}$ și tabela de corespondență alăturată.

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | | $b$ |

*a)* Faceți diagrama cu săgeți a relației de la $E^2$ la $E$ dată cu ajutorul tabelei.

*b)* Această relație determină o operație internă binară în $E$ ? Dacă da, este această operație totdeauna posibilă, sau nu ?

Diagrama cu săgeți solicitată la (*a*) este făcută în figura 135. Se constată că relația respectivă reprezintă o operație în $E$ (de ce ?), care nu este totdeauna posibilă (de ce ?)

*O tabelă de corespondență care definește o operație se numește tabelă de operație.*

Atît tabela de operații dată, cît și diagrama cu săgeți din figura 135, stabilesc următoarele corespondențe de la elemente (cupluri) din $E^2$ la elemente din $E$ :

$$(a, a) \longrightarrow a\,; \quad (a, b) \longrightarrow a\,; \quad (b, b) \longrightarrow b \qquad (a)$$

Este clar că, dacă cunoaștem mulțimea $E$ și corespondențele de la cuplurile din $E^2$ la elemente din $E$ scrise la (a), putem întocmi atît tabela de operație, cît și diagrama cu săgeți din figura 135. Așadar, cu ajutorul unor scrieri de felul celor de la (a) dispunem de *un mod de a stabili o operație scriind toate corespondențele de la un cuplu la un element care se realizează prin operația respectivă.*

Ca exerciții, să facem diagrama cu săgeți a relației de la $E^2$ la $E$ dată prin:

$$(a, a) \longrightarrow a \qquad (b, a) \longrightarrow a \qquad (b)$$
$$(a, b) \longrightarrow b \qquad (b, b) \longrightarrow b$$

Executînd diagramele mulțimilor $E^2$ și $E$, pe baza scrierilor de la (*b*) se trasează cu ușurință săgețile care indică cu ce element din $E$ corespunde fiecare cuplu din $E^2$, obținîndu-se diagrama cu săgeți din figura 136.

Se vede că scrierile de la (*b*) determină o operație în $E$ (de ce) ? care este totdeauna posibilă (de ce ?).

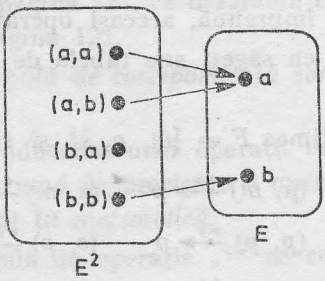


Fig. 135.

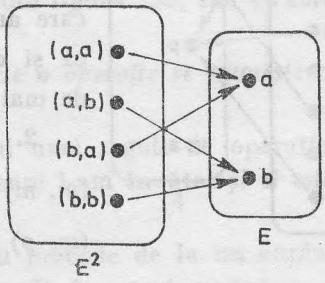


Fig. 136.

*Într-o aceeaşi mulţime E se pot introduce mai multe operaţii.* În cazul operaţiilor în $E$ date prin scrierile ($a$) şi ($b$) de mai sus, avem :

$(a, b) \longrightarrow a$ (cuplul $(a, b)$ corespunde cu $a$) dacă este vorba de operaţia dată prin ($a$), şi

$(a, b) \longrightarrow b$ (cuplul $(a, b)$ corespunde cu $b$) dacă este vorba de operaţia dată prin ($b$).

În acest mod de scriere nimic nu ne informează despre care din cele două operaţii este vorba. *Pentru a se evita confuziile, putem folosi un semn, un simbol care să le deosebească.*

Astfel, folosind simbolul „∘" (cerculeţ) pentru operaţia dată prin ($a$) şi „*" (steluţă) pentru aceea dată prin ($b$), dacă scriem :

$(a, b) \xrightarrow{\circ} a$ (cuplul $(a, b)$ prin operaţia notată cu „∘" corespunde cu $a$)

$(a, b) \xrightarrow{*} b$ (cuplul $a, b$) prin operaţia notată cu „*" corespunde cu $b$)

vom şti, de fiecare dată, de care operaţie este vorba.

Ca exerciţii, scrieţi din nou toate corespondenţele de la ($a$) folosind simbolul „∘" şi citiţi, de fiecare dată, scrierea respectivă, şi apoi faceţi acelaşi lucru cu corespondenţele de la ($b$).

Rezumînd cele de mai sus se vede că pînă acum am învăţat trei moduri de a stabili o operaţie :

1° prin diagrama cu săgeţi ;

2° prin tabelă de operaţie ;

3° prin scrierea tuturor corespondenţelor realizate de la cupluri formate cu elementele mulţimii, la elemente ale mulţimii.

**Probleme**

1. Se dă mulţimea $F = \{m, p, s\}$ şi diagrama cu săgeţi din figura 137.

*a)* Arătaţi că diagrama stabileşte o operaţie în $F$ care nu este totdeauna posibilă.

*b)* Faceţi tabela de operaţie corespunzătoare diagramei.

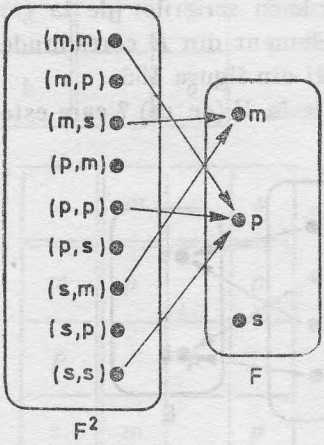

Fig. 137.

*c)* Folosind pentru această operaţie simbolul „·" (punct), scrieţi (şi citiţi de fiecare dată) toate corespondenţele de felul :

$$(m, m) \longrightarrow p$$

care ar stabili, împreună, aceeaşi operaţie în $F$ ca şi diagrama cu săgeţi sau tabela de operaţie de mai sus.

2. Fie mulţimea $F = \{m, p, s\}$ şi scrierile :

$$\begin{array}{lll} (m, m) \xrightarrow{**} m & (p, m) \xrightarrow{**} p & (s, m) \xrightarrow{**} s \\ (m, p) \xrightarrow{**} m & (p, p) \xrightarrow{**} p & (s, p) \xrightarrow{**} s \quad (c) \\ (m, s) \xrightarrow{**} m & (p, s) \xrightarrow{**} p & (s, s) \xrightarrow{**} s \end{array}$$

*a)* Faceţi diagrama cu săgeţi a relaţiei de la $F^2$ la $F$ stabilită de corespondenţele (*c*).

*b)* Arătaţi că relaţia dată prin (*c*) este o operaţie totdeauna posibilă în $F$. Ce simbol s-a folosit pentru această operaţie ?

*c)* Faceţi tabela de operaţie pentru operaţia „**“ în $F$ dată prin (*c*).

3. În mulţimea $F = \{m, p, s\}$ stabiliţi trei operaţii, diferite de cele din problemele (1) şi (2) de mai sus :

*a)* prima, folosind diagrama cu săgeţi ;

*b)* a doua, folosind tabela de operaţie ;

*c)* a treia, folosind simbolul „∘“ şi scriind toate corespondenţele ce se realizează de la cuplurile din $F^2$ la elemente din $F$ ;

*d)* fiecare din operaţiile astfel introduse, redaţi-o şi prin celelalte două procedee cunoscute.

## 4. OPERAŢII DATE PRIN REGULI DE OPERAŢIE

*Primul exemplu*

Să luăm mulţimea :

$$E = \{a, b\}$$

şi următoarea *regulă de corespondenţă de la cuplurile din $E^2$ la elemente din $E$, regulă pe care o vom nota cu simbolul „∘“* :

„Cuplurile care au componentele egale se pun în corespondenţă cu elementele din $E$ care figurează în cuplu ; cuplurile cu componentele diferite între ele se pun în corespondenţă cu $a$ din $E$, dacă componenta a doua nu este $a$“.

Executînd diagramele mulţimilor $E^2$ şi $E$ se trasează uşor corespondenţele indicate de regula „∘“ (se va face practic). Se constată că se obţine tocmai figura 140 care ştim că introduce o operaţie în $E$.

Aşadar, *dacă cunoaştem mulţimea $E$ şi regula „∘“ putem întocmi diagrama cu săgeţi a operaţiei.* Este clar că putem face şi tabela de operaţie sau putem scrie corespondenţele indicate la (a), pagina 121, ceea ce se va face şi ca exerciţiu.

*Rezultă că regula „∘“ stabileşte o operaţie în $E$* aceeaşi ca şi tabela de operaţie dată la pagina 121, ca diagrama cu săgeţi din figura 135, sau ca scrierile (*a*) de la pagina 121.

*O regulă de corespondenţă care stabileşte o operaţie se numeşte regulă de operaţie.*

Introducerea unei operaţii cu ajutorul unei reguli de operaţie este al patrulea mod de precizare a operaţiei pe care l-am învăţat *şi el este cel mai des folosit în matematică.*

Regula de operaţie „∘“ ne conduce cu precizie de la un cuplu din $E^2$, să zicem $(a, b)$, la corespondentul său din $E$, în cazul nostru $a$.

Aceasta face posibil a folosi pentru „$a$" din $E$ notarea simbolică „$a \circ b$", ceea ce duce la scrierea :

$a \circ b = a$ (a operat prin „$\circ$" cu $b$ este egal cu $a$).

În adevăr, din stînga egalității rezultă atît cuplul $(a, b)$ cît și regula „$\circ$" care ne conduce de la $(a, b)$ la $a$.

Pe viitor, în locul scrierilor de forma :

$$(a, b) \xrightarrow{\circ} a$$

vom folosi mai ales :

$$a \circ b = a$$

care păstrează întreaga semnificație a celei anterioare.

Folosind ultima notație introdusă, în baza regulii „$\circ$" date mai sus pentru mulțimea $E$, vom putea scrie :

$$a \circ a = a \; ; \; a \circ b = a \; ; \; b \circ b = b \qquad (d)$$

În general, într-o scriere de forma $x \circ y = z$, $x$ și $y$ se numesc „*termeni*" iar $z$ „rezultatul" operației „$\circ$" efectuate cu $x$ și $y$.

*Al doilea exemplu.*

În mulțimea :

$$E = \{a, b\}$$

să considerăm regula de corespondență „$*$" cu următorul conținut :

„Orice cuplu format cu elemente din $F$, se pune în corespondență cu al doilea element ce figurează în cuplul respectiv".

Aplicînd tuturor cuplurilor ce pot fi formate cu elemente din $E$, regula de corespondență „$*$", obținem :

$$(a, a) \xrightarrow{*} a \qquad (b, a) \xrightarrow{*} a \qquad (e)$$

$$(a, b) \xrightarrow{*} b \qquad (b, b) \xrightarrow{*} b$$

(Este bine să se citească aceste scrieri, așa cum s-a arătat, pentru a se forma obișnuința exprimării).

Executînd diagramele mulțimilor $E^2$ și $E$ și trasînd săgețile indicate de corespondențele de mai sus (se va face practic), se obține tocmai figura 136 care reprezintă diagrama cu săgeți a unei operații totdeauna posibilă în $E$.

Regula de corespondență „$*$", stabilind o operație în $E$, este o regulă de operație și deci putem scrie în loc de $(e)$ :

$$a * a = a \; ; \qquad a * b = b \qquad b * a = a \qquad b * b = b \qquad (f)$$

$$a * b = b$$

Observăm că scrierile de felul lui $(e)$ sînt posibile dacă „$*$" este o regulă de corespondență oarecare, dar scrierile de forma $(f)$ sînt folosite numai dacă regula de corespondență este în același timp o regulă de operație.

*Al treilea exemplu*

*Nu trebuie crezut că orice regulă de corespondenţă de la cupluri formate cu elemente ale unei mulţimi, la elemente ale acelei mulţimi, este şi o regulă de operaţie în acea mulţime. Este suficient ca regula să dea unor cupluri mai mult ca un corespondent, pentru ca ea să nu stabilească o operaţie în mulţimea respectivă.*

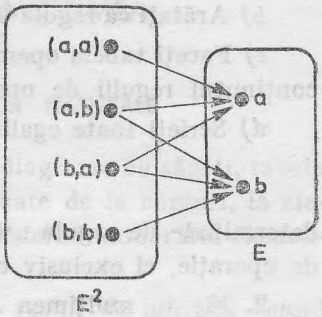


Fig. 138.

Ca exemplu, să luăm mulţimea :

$$E = \{a, b\}$$

şi regula de corespondenţă „△" (triunghi) cu următorul conţinut :

„Orice cuplu format cu elemente din $E$ se pune în corespondenţă cu elementele lui $E$ ce figurează în cuplul respectiv".

Aplicînd tuturor cuplurilor ce pot fi formate cu elemente din $E$, regula de corespondenţă „△", obţinem :

$$(a, a) \xrightarrow{\triangle} a \qquad (b, a) \xrightarrow{\triangle} \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

$$(a, b) \xrightarrow{\triangle} \begin{cases} a \\ b \end{cases} \qquad (b, b) \xrightarrow{\triangle} b \qquad (g)$$

Se vede că unele cupluri au mai mult ca un corespondent prin regula „△", *ceea ce face să avem o relaţie de la $E^2$ la $E$ care nu este şi funcţie.* Acest lucru este pus în evidenţă şi în figura 138, obţinută prin executarea diagramelor mulţimilor $E^2$ şi $E$ şi trasarea săgeţilor cerute de corespondenţele scrise la $(g)$.

*Nefiind funcţie de la $E^2$ la $E$, relaţia stabilită* prin „△" nu este nici operaţie.

*Întrucît regula de corespondentă „△" nu stabileşte o operaţie în $E$, ea nu este o regulă de operaţie în $E$ şi nu putem folosi scrieri ca cele de la (f).*

Interdicţia este necesară deoarece, de exemplu, cuplul $(a, b)$ şi regula „△" ne conduce şi la „$a$" şi la „$b$" din $E$. Ar urma să scriem simultan :

$$a \triangle b = a \text{ şi } a \triangle b = b$$

adică am obţine aceeaşi notaţie „$a \triangle b$" pentru două elemente diferite din $E$, şi pentru $a$ şi pentru $b$, ceea ce ar da loc la confuzii.

**Probleme**

1. Se dă mulţimea $F = \{m, p, s\}$ şi următoarea regulă de corespondenţă, pe care o notăm cu „·" : „Orice cuplu format cu elemente din $F$ se pune în corespondenţă cu :

$p$, dacă elementele cuplului sînt egale ;

$m$, dacă cuplul conţine şi pe $m$ şi pe $s$.

*a)* Faceţi diagrama cu săgeţi a relaţiei de la $F^2$ la $F$ stabilită de regula de corespondenţă „·".

*b)* Arătați că regula de corespondență „∘" este și o regulă de operație în $F$.

*c)* Faceți tabela operației „·" fără a folosi diagrama cu săgeți, ci exclusiv conținutul regulii de operație dată inițial.

*d)* Scrieți toate egalitățile de forma

$$m \cdot m = p$$

determinate de regula „·" în $F$, fără a folosi diagrama cu săgeți sau tabela de operație, ci exclusiv conținutul regulii „·" dat inițial.

**2.** Fie în mulțimea $F = \{m, p, s\}$ regula de corespondență „**" prin care fiecare cuplu format cu elemente din $F$ este pus în corespondență cu elementul din $E$ care figurează drept primă componentă în cuplul respectiv.

*a)* Executați diagrama cu săgeți a relației de la $F^2$ la $F$ stabilită de această regulă de corespondență.

*b)* Cu ajutorul diagramei arătați că „**" determină o operație totdeauna posibilă în $F$.

*c)* Folosind simbolul „**" al operației și semnul „=" al egalității, scrieți rezultatele operației „**" efectuate cu oricare elemente din $F$, după modelul :

$$m{*}{*}m = m$$

**3.** În mulțimea $F = \{m, p, s\}$ se dă regula de corespondență „.·.": „Orice cuplu format cu elemente din $F$, care nu conțin $p$, se pune în corespondență cu elementele din $F$ care figurează în cuplul respectiv".

*a)* Este „.·." o regulă de operație în $F$ ?

*b)* Folosind una din scrierile :

$$(m, m) \xrightarrow{.\cdot.} m \text{ și } m \,.\cdot.\, m = m$$

precizați toate corespondențele stabilite de „.·." de la cupluri din $F^2$ la elemente din $F$.

*c)* Puteți schimba alegerea făcută la (*b*) ? Dacă da, schimbați-o.

**4.** În mulțimea $A = \{a, b, c\}$ se dă regula „$\overset{*}{*}$" formulată : „Orice cuplu format cu elemente din $A$ se pune în corespondență cu elemente din $A$, care :

— figurează în cuplul respectiv, dacă componentele cuplului sînt egale ;

— nu figurează în cuplul respectiv, dacă componentele cuplului sînt diferite între ele."

*a)* Este „$\overset{*}{*}$" o regulă de operație în $A$ ?

*b)* Folosind una din scrierile :

$$(a, b) \xrightarrow{\overset{*}{*}} c \text{ și } a \overset{*}{*} b = c$$

precizați toate corespondențele stabilite de „$\overset{*}{*}$" de la cupluri din $A^2$ la elemente din $A$.

*c)* Puteți schimba alegerea făcută la (*b*) ? Dacă da, schimbați-o.

# 6. OPERAȚII INTERNE BINARE ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

## 1. OPERAȚII „OARECARE" ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Indicarea unei operații într-o mulțime folosind diagrama cu săgeți, tabela de operație sau scriind toate corespondențele realizate de la cupluri, la elemente ale mulțimii, se complică repede odată cu creșterea numărului elementelor acelei mulțimi.

*Avantajul precizării operației cu ajutorul unei reguli de operație constă tocmai în independența sa de numărul de elemente al mulțimii în care se introduce operația.*

*Dacă mulțimea are un număr nesfîrșit de elemente,* cum este cazul mulțimii $N$ a numerelor naturale, *calea introducerii printr-o regulă rămîne singura posibilă.*

Să luăm cîteva exemple :

*Exemplul 1.*

Fie regula de corespondență exprimată prin :

$$(n, p) \xrightarrow{*} n$$

unde $n$ și $p$ sînt numere naturale.

Introduce această regulă o operație în $N$ ? Dacă da, este ea totdeauna posibilă, sau nu ?

Mai întîi observăm că regula „*" poate fi formulată : *orice cuplu de numere naturale se pune în corespondență cu numărul natural ce figurează drept prim element al cuplului respectiv.*

În baza ei, vom avea :

$$(2\,;\,3) \xrightarrow{*} 2\,;\ (4\,;\,0) \xrightarrow{*} 4\,;\ (1\,;\,1) \xrightarrow{*} 1\,;\ \text{etc.}$$

Deoarece „*" face să corespundă la cupluri din $N^2$, elemente din $N$, ea introduce o relație de la $N^2$ la $N$.

Să analizăm dacă relația respectivă este și operație în $N$.

În acest scop *trebuie să cercetăm dacă există cupluri care primesc prin „*" mai mult decît un corespondent.* După cum se știe, *pentru a avea o operație trebuie* să nu existe astfel de cupluri.

Dar, orice cuplu din $N^2$ are un singur prim element, deci regula „*" nu poate da unui cuplu mai mult decît un corespondent. Așadar, ea determină o operație în $N$. Ca urmare, vom putea scrie :

$$2*3 = 2\,;\quad 4*0 = 4\,;\quad 1*1 = 1\,;\ \text{etc.}$$

Să vedem acum dacă operația „*" în $N$ este totdeauna posibilă, sau nu.

Întrucît fiecare cuplu are un prim element, rezultă că *fiecare cuplu va primi un corespondent prin regula „*"* și deci operația este totdeauna posibilă.

*Exemplul 2*

Fie regula de corespondență exprimată prin :

$$(n, p) \xrightarrow{\circ} \max\{n, p\}, \text{ pentru } n \neq p$$

unde $n$ și $p$ sînt numere naturale, iar notația max $\{n, p\}$ reprezintă pe cel mai mare dintre numerele $n$ și $p$.

Introduce această regulă de corespondență o operație în $N$? În caz afirmativ, este ea totdeauna posibilă, sau nu?

Regula de corespondență de mai sus poate fi formulată : *orice cuplu de numere naturale, avînd componentele diferite, se pune în corespondență cu cel mai mare din numerele ce figurează drept componente.*

Pentru a-i înțelege clar conținutul, să stabilim cîteva corespondențe cu această regulă :

$$(5 ; 1) \xrightarrow{\circ} 5 ; \quad (2 ; 7) \xrightarrow{\circ} 7 ; \quad (0 ; 3) \xrightarrow{\circ} 3 ; \text{ etc.}$$

Pentru a vedea dacă „$\circ$" determină o operație în $N$, este suficient să observăm că *dintre două numere naturale diferite, unul singur este cel mai mare. Așadar, nici un cuplu nu poate primi prin „$\circ$" mai mult decît un corespondent și deci „$\circ$" determină o operație în $N$.* Pe această bază putem scrie :

$$5 \circ 1 = 5 ; \quad 2 \circ 7 = 7 ; \quad 0 \circ 3 = 3 ; \text{ etc.}$$

Acum analizăm dacă operația „$\circ$" în $N$ este totdeauna posibilă, sau nu.

Prin intermediul lui „$\circ$" găsim un corespondent la fiecare cuplu format cu numere naturale diferite între ele, dar „$\circ$" nu ne spune ce corespondent să dăm cuplurilor conținînd componente egale între ele :

$$(3 ; 3) \xrightarrow{\circ} ? ; \quad (0 ; 0) \xrightarrow{\circ} ? \quad (9 ; 9) \xrightarrow{\circ} ?$$

Lăsînd cupluri din $N^2$ fără corespondent în $N$, „$\circ$" determină în $N$ o operație ce nu este totdeauna posibilă :

$$3 \circ 3 = \text{imposibil} ; \quad 0 \circ 0 = \text{imposibil} ; \quad 9 \circ 9 = \text{imposibil}.$$

*Exemplul 3*

Se dă regula de corespondență :

$$(n, p) \xrightarrow{\triangle} \begin{cases} \max\{n, p\}, & \text{dacă } n \neq p \\ 5, & \text{dacă } n = p. \end{cases}$$

Introduce ea o operație în $N$? În caz afirmativ, este ea totdeauna posibilă, sau nu?

Conținutul regulii este asemănător cu acela de la exemplul anterior, numai că „$\triangle$" nu lasă fără corespondent cuplul în care componentele sînt egale :

$$(1, 8) \longrightarrow 8 ; \quad (7 ; 0) \longrightarrow 7 ; \quad (4 ; 9) \longrightarrow 9$$

$$(3, 3) \longrightarrow 5 ; \quad (0 ; 0) \longrightarrow 5 ; \quad (5 ; 5) \longrightarrow 5 ; \text{ etc.}$$

Judecînd ca la exemplul (2) deducem că „△“ introduce o operație în $N$, care este totdeauna posibilă. Vom putea scrie :

$$1 \triangle 8 = 8 ; \quad 7 \triangle 0 = 7 ; \quad 4 \triangle 9 = 9$$

$$3 \triangle 3 = 5 ; \quad 0 \triangle 0 = 5 ; \quad 5 \triangle 5 = 5 ; \text{ etc.}$$

*Exemplul 4*

Se dă regula de corespondență :

$$(n, p) \xrightarrow{\odot} \text{oarecare dintre } n \text{ și } p$$

unde $n$ și $p$ sînt numere naturale.

Determină ea o operație în $N$ ? Dacă da, este aceasta totdeauna posibilă, sau nu ?

Pentru a deveni clar conținutul lui „⊙“, să stabilim cu ea corespondentul cîtorva cupluri :

$$(4 ; 7) \xrightarrow{\odot} 4 \text{ dar avem și } (4 ; 7) \xrightarrow{\odot} 7$$

$$(6 ; 6) \xrightarrow{\odot} 6$$

$$(9 ; 1) \xrightarrow{\odot} 9 \text{ dar avem și } (9, 1) \xrightarrow{\odot} 1 ; \text{ etc.}$$

Observăm că, de exemplu :

$$(4 ; 7) \xrightarrow{\odot} \begin{cases} 4 \\ 7 \end{cases}$$

*adică cuplurile avînd elementele diferite primesc prin regula „⊙“ mai mult ca un corespondent în N. Deducem că „⊙“ determină o relație de la $N^2$ la N, fără a determina o operație în N.*

Întrucît nu avem o operație în $N$, nu se mai pune problema cercetării dacă este totdeauna posibilă, sau nu.

De asemenea, observăm că nu putem scrie :

$$4 \odot 7 = 4, \text{ deoarece ar urma să scriem și}$$

$$4 \odot 7 = 7.$$

Prin urmare, întîlnind notația $4 \odot 7$ nu am putea ști dacă este vorba de numărul 4, sau de numărul 7, ceea ce ar da naștere la confuzii (Din cele două scrieri ar urma $4 = 4 \odot 7 = 7$ deci $4 = 7$, ceea ce este fals. Așadar, admițînd scrierile respective s-ar introduce greșeli în calculul matematic).

**Probleme**

1. Verificați dacă regula de corespondență :

$$(n, p) \xrightarrow{**} p$$

unde $n$ și $p$ sînt numere naturale, determină o operație în $N$. În caz afirmativ, este aceasta totdeauna posibilă, sau nu ?

**2.** Se dă regula de corespondență :

$$(n,\ p) \xrightarrow{\circ\circ} \min\{n,\ p\},\ \text{pentru}\ n \neq p$$

unde $n$ și $p$ sînt numere naturale, iar notația $\min\{n,\ p\}$ reprezintă pe cel mai mic dintre numerele $n$ și $p$.

Determină această regulă o operație în $N$ ? Dacă da, este ea totdeauna posibilă ?

**3.** Cercetați dacă regula :

$$(n,\ p) \xrightarrow{\triangle} \begin{cases} \min\{n,\ p\}, & \text{dacă } n \neq p \\ 0, & \text{dacă } n = p \end{cases}$$

introduce o operație în $N$. În caz afirmativ, vedeți dacă ea este totdeauna posibilă.

**4.** Cercetați dacă regula :

$$(n,\ p) \xrightarrow{\square} \begin{cases} 6, \text{ dacă } n = p\ ; \\ \text{orice număr natural mai mic decît } 3, \\ \text{dacă } n \neq p \end{cases}$$

determină o operație în $N$. Dacă da, este totdeauna posibilă ?

## 2. OPERAȚII „OBIȘNUITE" ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

**1.** Să luăm regulele de corespondență :

$$(a,\ b) \xrightarrow{+} s\ ; \qquad (a,\ b) \xrightarrow{\times} p$$

*unde $a$ și $b$ sînt numere naturale, „+", „×" sînt regulele cunoscute de adunare și înmulțire a numerelor naturale* (date cu ajutorul mulțimilor), *iar $s$ și $p$ sînt, respectiv, suma și produsul numerelor naturale $a$ și $b$ obținute cu aceste reguli.*

Ne întrebăm dacă „+" și „×" pe care le cunoaștem determină în $N$ operații în sensul în care este privită operația în acest capitol. În caz afirmativ, sînt aceste operații totdeauna posibile, sau nu ?

După cum știm, *regulile „+" și „×" nu dau la nici un cuplu de numere naturale mai mult decît o sumă, respectiv un produs. Urmează că ele determină operații în $N$, putînd scrie :*

$$a + b = s \quad \text{și} \quad a \times b = p.$$

De asemenea, *se știe că regulile „+“ și „×“ pot fi aplicate și conduc la o sumă, respectiv un produs, oricare ar fi numerele naturale a și b. Nelăsînd nici un cuplu din $N^2$ fără corespondent în N, „+“ și „×“ determină operații totdeauna posibile în N.*

2. *Să luăm regulile de corespondență :*

$$\underline{(a,\ b) \xrightarrow{-} d\ ;} \qquad \underline{(a,\ b) \xrightarrow{:} c}$$

*unde a și b sînt numere naturale, „—“, „:“ sînt regulile cunoscute de scădere și împărțire cu rest* a numerelor naturale (date cu ajutorul mulțimilor), iar *d* și *c* *sînt, respectiv, diferența și cîtul numerelor naturale a și b, obținute cu aceste reguli.*

Ne întrebăm dacă „—“ și „:“ pe care le cunoaștem, determină în *N* operații în sensul în care este privită operația în acest capitol. În caz afirmativ, sînt aceste operații totdeauna posibile, sau nu ?

După cum știm, *regulile „—“ și „:“ nu dau la nici un cuplu de numere naturale mai mult decît o diferență, respectiv un cît. Urmează că ele determină operații în N,* putînd scrie :

$$a - b = d\ ; \quad a : b = c$$

*Exemple :*

$$8 - 3 = 5\ ;\ 18 : 3 = 6\ ;\ 17 : 5 = 3\ ;\ 3 : 7 = 0,\ \text{etc.}$$

De asemenea, *se știe că regula „—“ nu poate fi aplicată dacă $a < b$,* iar *regula „:“ (împărțire cu rest) nu poate fi aplicată dacă $b = 0$. Lăsînd unele cupluri din $N^2$ fără corespondent în N, „—“ și „:“ determină operații în N care nu sînt totdeauna posibile.*

*Exemple :*

$$5 - 7 = \text{imposibil}\ ; \qquad 4 : 0 = \text{imposibil}\ ;$$

Facem observația că, luînd pentru „:“ înțelesul de împărțire exactă în *N*, se găsește la fel ca pentru împărțirea cu rest, că împărțirea exactă este o operație în *N* care nu este totdeauna posibilă. Deosebirea față de împărțirea cu rest este aceea că, *la împărțirea exactă rămîn imposibile toate cazurile în care împărțirea cu rest era neexactă.*

*Exemple :* („:“ fiind împărțirea exactă în *N*) :

$12 : 4 = 3$ $\qquad$ $17 : 5 =$ imposibil

$9 : 0 =$ imposibil $\qquad$ $3 : 7 =$ imposibil.

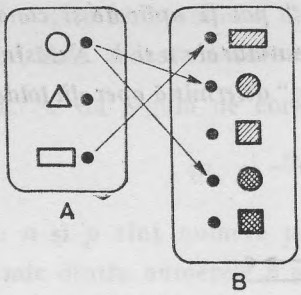


Fig. 139.

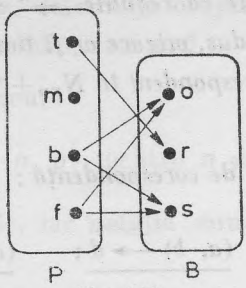


Fig. 140.

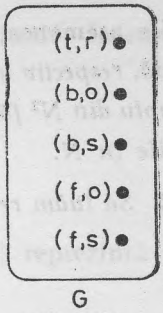


Fig. 141.

**Indicații privind rezolvarea unora dintre exercițiile și problemele propuse la capitolul XI**

## TEMA A 2-A : CORESPONDENȚA DE LA O MULȚIME LA O MULȚIME SAU RELAȚIA DE LA O MULȚIME LA O MULȚIME

**Problema 1**

*a)* Fig. 139 ;

*b)* $A$ mulțime de plecare și $B$ mulțime de sosire.

*c)* △ din $A$ nu are corespondent în $B$, iar ○ din $A$ are corespondent în $B$ și pe ⊘ și pe ⊗ ;

*d)* ▨ și ▩ din $B$ nu corespund la nici un element din $A$, ▨, ○ și ○ din $B$ corespund la cîte un element din $A$, neexistînd nici un element din $B$ care să corespundă la mai multe elemente din $A$ ;

*e)* $G = \{$(○, ⊘) ; (○, ⊗), (▭ ▨)$\}$

**Problema 2**

*a)* Figura 140 ;

*b)* $G = \{(t, r), (b, o), (b, s), (f, o) (f, s)\}$. Fig. 141 ;

*c)* $m$ din $P$ nu are corespondent în $B$, $t$ are un corespondent, iar $b$ și $f$ au cîte două ;

*d)* Nu sînt elemente în $B$ care să nu corespundă la nici un element din $A$, $r$ corespunde la un singur element din $A$, iar $o$ și $s$ la cîte două.

*e)* $\{(t, o), (t, s), (m, o), (m, r), (m, s), (b, r), (f, r)\}$.

*f)* Fig. 142.

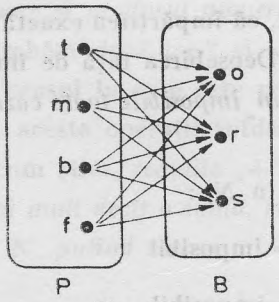


Fig. 142.

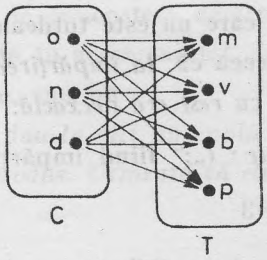


Fig. 143.

**Problema 3**

Notăm prescurtat elementele mulțimilor $C$ și $T$ cu inițialele denumirilor lor : $C = \{o, n, d\}$ ; $T = \{m, v, b, p\}$.

*a)* Fig. 143 ;

*b)* $G = (o, m), (o, v), (o, b), (o, p), (n, m), (n, v), (n, b), (n, p), (d, m), (d, v), (d, b), (d, p)\}$ ;

*c)* Figura 143 arată clar că avem o corespondență de la mulțimea $C$ la mulțimea $T$. Observăm că orice corespondență „de la" o mulțime la o mulțime este în același timp o corespondență „între" mulțimi.

*d)* $G$ formată la (*b*) reprezintă graful relației stabilite de la $C$ la $T$. Diagrama mulțimii $G$ este în figura 144.

*e)* { }, adică mulțimea vidă, deoarece nu există alte cupluri cu elementul de plecare din $C$ și cel de sosire în $T$, în afara celor existente în $G$.

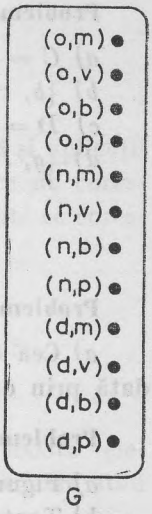

Fig. 144.

**Problema 4**

*a)* Relații sînt determinate în fig. 123 și 124, deoarece sînt corespondente de la prima mulțime la cea de a doua. Corespondența din figura 122 este „între" mulțimile $A$ și $B$, dar nu este „de la" o mulțime la o mulțime, existînd corespondențe de la un element la un element orientate și de la $A$ la $B$, ca $m \longrightarrow u$, și de la $B$ la $A$, ca $t \longrightarrow s$.

*b)* Pentru relația din fig. 123 graful este :

$$\{(b, g), (e, g), (e, i), (f, g)\}$$

și pentru relația din figura 124 graful este :

$$\{(c, o), (c, p), (d, o), (d, p), (g, o), (g, p)\}.$$

*c)* A doua, conținînd toate cuplurile la care primul element aparține la prima mulțime și al doilea aparține mulțimii a doua.

**Problema 5**

*a)* Figura 145 ;

*b)* $G = \{(m, d), (r, f), (r, h), (s, k)\}$ ; *c)* figura 146 ; *d)* $E = \{m, r, s\}$ ; *e)* $T = \{d, s, h, k\}$.

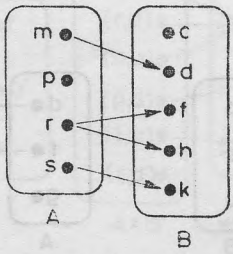

Fig. 145.

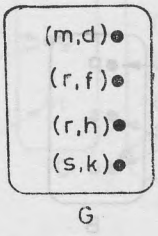

Fig. 146.

**Problema 6**

*a)* $C = \{a, b, c, f\}$ pentru figura 123 și $E = \{c, d, g\}$ pentru figura 124 ;
*b)* $\{b, c, f\}$ pentru figura 123 și $E = \{c, d, g\}$ pentru figura 124 ;
*c)* $D = \{g, h, i\}$ pentru figura 123 și $F = \{o, p\}$ pentru figura 124 ;
*d)* $\{g, i\}$ pentru figura 123 și $F = \{o, p\}$ pentru figura 124.

## TEMA A 3-A : FUNCȚII. APLICAȚII

**Problema 1**

*a)* Cea dată prin diagrama (2) ; *b)* Cea dată prin diagrama (3) ; *c)* Cea dată prin diagrama (1).

**Problema 2**

*a)* Figurile 147, 148 și 149.

*b)* Toate reprezintă relații de la $A$ la $B$, ($R$) și $T$ determină funcții și $R$ determină aplicație de la $A$ la $B$ (de ce ?).

*c)* $\{d, f, g\}$ mulțimea de definiție și $\{p, s, u\}$ mulțimea valorilor relației determinate de $C$ ;

$\{d, f, g\}$ și $\{p, s\}$ sînt, respectiv, mulțimea de definiție și mulțimea valorilor relației determinate de $R$ ;

$\{d, f\}$ și $\{p, s\}$ sînt respectiv, mulțimea de definiție și mulțimea valorilor relației determinate de $T$.

*d)* Mulțimea de plecare este egală cu mulțimea de definiție pentru relațiile determinate de $C$ și $R$ ; mulțimea de sosire este egală cu mulțimea valorilor pentru relația determinată de $C$.

**Problema 3**

*a)* Nici unui elev din $E$ nu-i corespunde, în acest mod, mai mult ca o bancă din $B$, deci relația este funcție de la $E$ la $B$. Nerămînînd elevi din $E$ la care să nu corespundă o bancă din $B$, funcția respectivă este și aplicație a lui $E$ în $B$.

*b)* Același răspuns ca la (*a*), neavînd importanță dacă în $B$ rămîn, sau nu, elemente ce nu corespund unor elemente din $E$.

*c)* Funcție, fără a fi aplicație, acuma existînd elemente din $E$ fără corespondent în $B$.

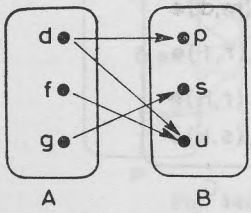

Fig. 147.

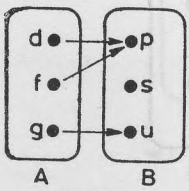

Fig. 148.

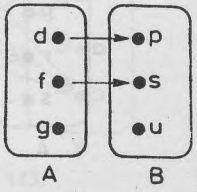

Fig. 149.

**Problema 4**

Judecînd ca la problema (3) obţinem :

*a)* Funcţie, fără a fi aplicaţie de la $P$ la $S$.

*b)* Funcţie de la $P$ la $S$, care este şi aplicaţie.

*c)* Nu se modifică, deoarece la clasificarea relaţiilor în funcţii şi aplicaţii nu are importanţă dacă în mulţimea de sosire rămîn elemente ce nu corespund la nici un element din mulţimea de plecare, sau există elemente ce corespund la mai mult decît un element din mulţimea de plecare.

**Problema 5**

Acelaşi mod de gîndire ca la cele două probleme anterioare :

*a)* Funcţie de la $S$ la $P$, care este şi aplicaţie.

*b)* Funcţie de la $S$ la $P$, care nu este şi aplicaţie.

*c)* Relaţii de la $S$ la $P$, care nu sînt şi funcţii deoarece există elemente din $S$ cu mai mult ca un corespondent în $P$ (scaunele pe care stau doi copii).

## TEMA A 4-A : OPERAŢII BINARE

**Problema 1**

*a)* (1) şi (3) stabilesc operaţii. (2) este relaţie de la $A \times B$ la $C$, fără a fi funcţie (de ce ?) şi nu poate fi, deci, operaţie.

*b)* (3) nu este operaţie totdeauna posibilă, lăsînd cuplul $(e, f)$ din $A \times B$ fără corespondent în $C$. (1) dă operaţie totdeauna posibilă, fiecare cuplu din $A \times B$ avînd un corespondent în $C$.

**Problema 2**

*a)* Figurile 150 şi 151 ; *b)* Figurile 152 şi 153.

**Problema 3**

*a)* Figura 154. Operaţia nu este totdeauna posibilă.

*b)* Figura 155. Operaţia este totdeauna posibilă.

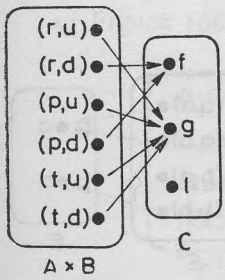


Fig. 150.

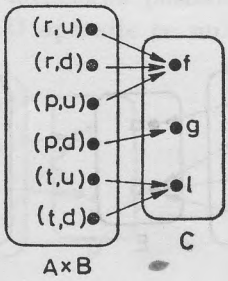


Fig. 151.

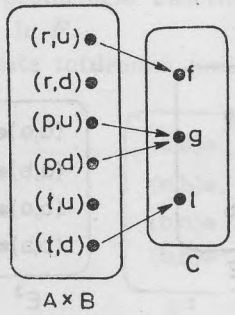


Fig. 152.

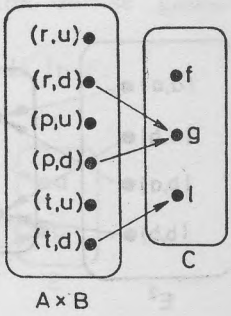


Fig. 153.

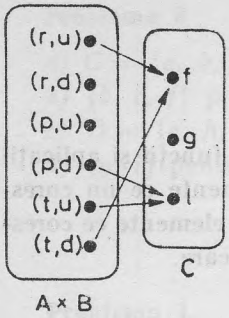


Fig. 154.

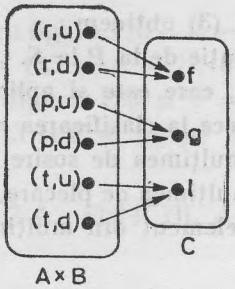


Fig. 155.

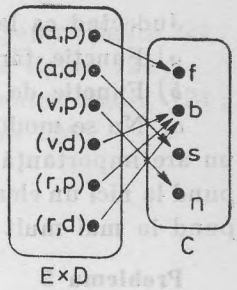


Fig. 156.

**Problema 4**

Figura 156 arată că avem o relaţie de la $E \times D$ la $C$ (de ce ?), care este şi funcţie (de ce ?) şi aplicaţie (de ce ?). Fiind funcţie este şi operaţie, fiind aplicaţie, operaţia este totdeauna posibilă.

## TEMA A 5-A : OPERAŢII INTERNE BINARE ÎNTR-O MULŢIME

### SUBTEMA 2° : OPERAŢIA INTERNĂ BINARĂ ÎNTR-O MULŢIME

**Exerciţiul 1**

Figurile 157 şi 158. Sînt posibile şi alte alternative ?

**Exerciţiul 2**

Figurile 159 şi 160. Sînt posibile şi alte alternative ?

**Exerciţiul 3**

*a)* Figura 161 şi alte două de acest fel, avînd grijă a nu rămîne cupluri din $F^2$ fără corespondent în $F$, dar putînd rămîne în $F$ elemente în care să nu sosească nici o săgeată.

*b)* Se fac trei figuri ca la (a), dar se lasă unele cupluri din $F^2$ fără corespondent în $F$ (pe figură, de la unele cupluri din $F^2$ nu pleacă săgeţi).

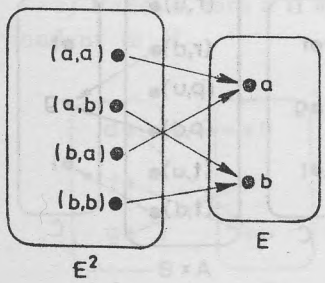


Fig. 157.

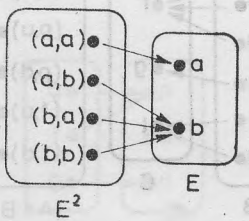


Fig. 158.

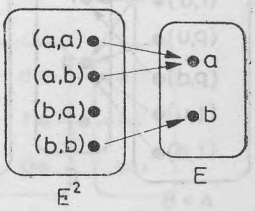


Fig. 159.

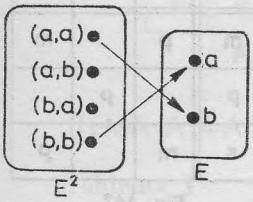


Fig. 160.

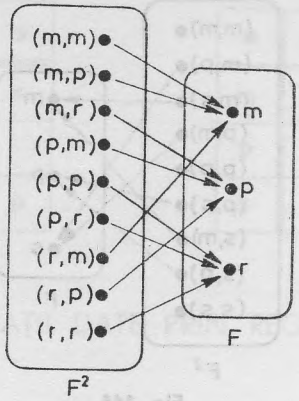


Fig. 161.

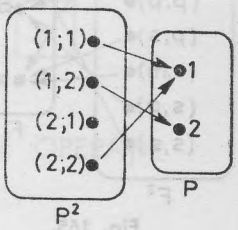


Fig. 162.

**Problema 4**

Figura 162. Avem o relaţie de la $P^2$ la $P$ (de ce ?), care este şi funcţie (de ce ?), deci este operaţie internă binară în $P$. Nefiind aplicaţie (de ce ?) operaţia nu este totdeauna posibilă în $P$.

**Problema 5**

Se rezolvă după modelul anterior. Se obţine o operaţie totdeauna posibilă în $P$ (fig. 163).

**Problema 6**

*a)* Figura 164 ;

*b)* nici un cuplu din $E^2$ nu are mai mult ca un corespondent în $E$, deci avem o funcţie. Fiind funcţie de la $E^2$ la $E$ este şi operaţie. Întrucît nu este aplicaţie (cuplul $(b, a)$ din $E$ nu are corespondent în $E$), operaţia nu este totdeauna posibilă în $E$.

**Problema 7**

*a)* Figura 137. Judecînd ca la problema anterioară se vede că avem o operaţie în $F$ care nu este totdeauna posibilă.

*b)* Figura 165. Se judecă ca la problemele anterioare, dar se găseşte că este o operaţie totdeauna posibilă în $F$.

*c)* Figura 166. O operaţie ce nu este totdeauna posibilă în $F$.

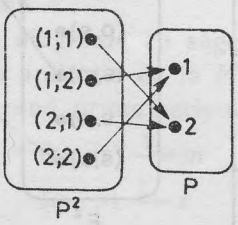


Fig. 163.

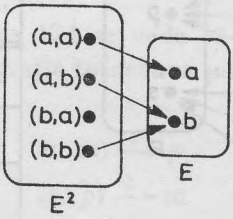


Fig. 164.

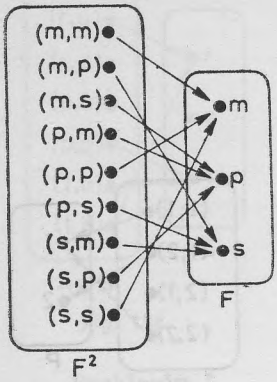


Fig. 165.

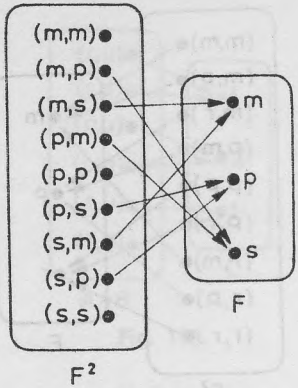


Fig. 166.

| | m | p | s |
|---|---|---|---|
| m | p | | m |
| p | | p | |
| s | m | | p |

Fig. 167.

## TEMA A 3-a : DIVERSE MODURI DE PRECIZARE A UNEI OPERAȚII

**Problema 1**

*b)* Tabela din figura 167.

*c)* $(m, m) \xrightarrow{\circ} p$ $\quad (p, p) \xrightarrow{\circ} p$ $\quad (s, s) \xrightarrow{\circ} p$

$(m, s) \xrightarrow{\circ} m$ $\quad (s, m) \xrightarrow{\circ} m$

**Problema 2**

*a)* Figura 168 ; *c)* Figura 169.

**Problema 3**

*a)* Figura 170 ; *b)* Figura 171.

*c)* $m \circ p = p$ $\quad s \circ s = s$ $\quad a \circ p = s$

$p \circ p = m$ $\quad m \circ p = m$ $\quad s \circ m = p.$

*Notă :* Evident, sînt posibile și alte alternative.

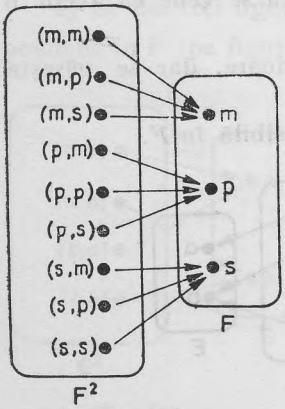


Fig. 168.

| | m | p | s |
|---|---|---|---|
| m | m | m | m |
| p | p | p | p |
| s | s | s | s |

Fig. 169.

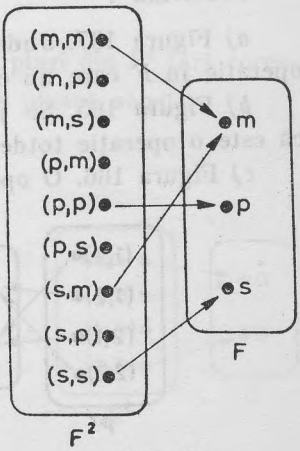


Fig. 170.

| | m | p | s |
|---|---|---|---|
| m | p | | s |
| p | | p | |
| s | s | | p |

Fig. 171.

| • | m | p | s |
|---|---|---|---|
| m | p | | m |
| p | | p | |
| s | m | | p |

Fig. 172.

## TEMA A 4-A : OPERAȚII DATE PRIN REGULI DE OPERAȚII

**Problema 1**

*a)* Figura 137. *b)* Din figură se vede că avem o funcție de la $F^2$ la $F$, deci regula „$\circ$" stabilește o operație în $F$. Așadar, „$\circ$" este o regulă de operație în $F$.

*c)* Tabela din figura 172.

*d)* $m \cdot m = p \qquad p \cdot p = p \qquad s \cdot s = p$

$m \cdot s = m \qquad s \cdot m = m$

**Problema 2**

*c)* $m{**}m = m \qquad p{**}m = p \qquad s{**}m = s$

$m{**}p = m \qquad p{**}p = p \qquad s{**}p = s$

$m{**}s = m \qquad p{**}s = p \qquad s{**}s = s$

**Problema 3**

*a)* Se face diagrama cu săgeți din figura 173. Se vede că avem o relație de la $F^2$ la $F$ care nu este funcție, unele cupluri din $F^2$ avînd mai mult ca un corespondent în $F$ (cum ar fi $(m, s)$ care are corespondent și pe $m$ și pe $s$). Nefiind funcție, nu este operație în $F$.

*b)* $(m, m) \xrightarrow{\cdot} m \qquad (m, s) \xrightarrow{\cdot} s \qquad (s, m) \xrightarrow{\cdot} s$

$(m, s) \xrightarrow{\cdot} m \qquad (s, m) \xrightarrow{\cdot} m \qquad (s, s) \xrightarrow{\cdot} s$

*c)* Alegerea modului de scriere nu poate fi schimbată, al doilea mod nefiind permis în cazul nostru, deoarece nu avem o operație.

**Problema 4**

*a)* Din diagrama cu săgeți făcută în figura 174 se vede că regula „$**$" stabilește o aplicație de la $F^2$ la $F$, deci o operație totdeauna posibilă în $F$.

*b)* Folosind prima scriere :

$(m, m) \xrightarrow{**} m \qquad (p, m) \xrightarrow{**} s \qquad (s, m) \xrightarrow{**} p$

$(m, p) \xrightarrow{**} s \qquad (p, p) \xrightarrow{**} p \qquad (s, p) \xrightarrow{**} m$

$(m, s) \xrightarrow{**} p \qquad (p, s) \xrightarrow{**} m \qquad (s, s) \xrightarrow{**} s$

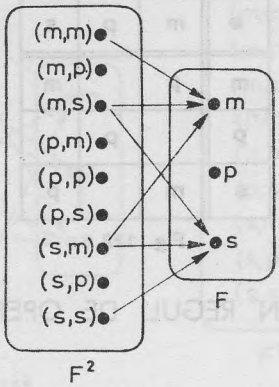


Fig. 173.

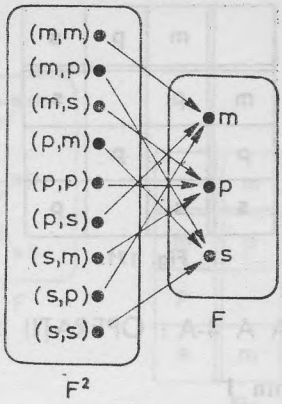


Fig. 174.

*c)* Avînd o operație, putem folosi și scrierea a doua :

$$m \overset{*}{\cdot} m = m \qquad p \overset{*}{\cdot} m = s \qquad s \overset{*}{\cdot} m = p$$

$$m \overset{*}{\cdot} p = s \qquad p \overset{*}{\cdot} p = p \qquad s \overset{*}{\cdot} p = m$$

$$m \overset{*}{\cdot} s = p \qquad p \overset{*}{\cdot} s = m \qquad s \overset{*}{\cdot} s = s$$

## TEMA A 6-A : OPERAȚII INTERNE BINARE ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

### SUBTEMA 1° : OPERAȚII „OARECARE" ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

**Problema 1**

Regula pune în corespondență cuplul format cu numere naturale, cu numărul natural ce figurează ca al doilea element în cuplul respectiv. În acest mod, nici un cuplu nu poate primi mai mult de un corespondent, așadar regula „**" determină o operație în $N$.

Deoarece fiecare cuplu are un al doilea element, urmează că nu pot rămîne cupluri de numere naturale fără corespondent prin regula „**", și ea definește o operație totdeauna posibilă în $N$. Vom avea :

$$3**5 = 5\,; \qquad 8**7 = 7\,; \qquad 4**4 = 4\,; \text{ etc.}$$

**Problema 2**

Să stabilim cîteva corespondențe cu regula „∘∘"

$$(3\,;\,5) \xrightarrow{\circ\circ} 3\,; \quad (8\,;\,7) \xrightarrow{\circ\circ} 7\,; \quad (4\,;\,4) \xrightarrow{\circ\circ} ?$$

Dacă componentele cuplului sînt diferite, dintre ele unul este mai mare și unul mai mic. Regula „∘∘" face să corespundă cuplului de numere naturale cu elementele diferite între ele, cel mai mic dintre acestea. Așadar, un cuplu nu poate primi prin „∘∘" mai mult ca un corespondent, deci ea definește o operație în $N$.

Lăsînd fără corespondent cuplurile ce au componentele egale, operația respectivă nu este totdeauna posibilă în $N$. Vom avea :

$$3 \circ\circ 5 = 3 ; \qquad 8 \circ\circ 7 = 7 ; \qquad 3 \circ\circ 4 = \text{imposibil} ; \text{ etc.}$$

**Problema 3**

Judecînd ca la problema anterioară se găsește că este o operație totdeauna posibilă în $N$. În adevăr, de data aceasta cuplurile cu componentele egale primesc corespondent pe 0 :

$$3 \triangle 5 = 3 ; \quad 8 \triangle 7 = 7 ; \quad 4 \triangle 4 = 0 ; \text{ etc.}$$

**Problema 4**

Să stabilim cîteva corespondențe cu regula „□" :

$$(3 ; 5) \xrightarrow{\square} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \text{ cu sensul } \begin{array}{l} (3 ; 5) \xrightarrow{\square} 0 \\ (3 ; 5) \xrightarrow{\square} 1 \\ (3 ; 5) \xrightarrow{\square} 2 \end{array}$$

$$(8 ; 7) \xrightarrow{\square} \begin{cases} 0 \\ 1 ; \\ 2 \end{cases} \quad (4 ; 4) \xrightarrow{\square} 6 ; \quad (0 ; 0) \xrightarrow{\square} 6 ; \text{ etc.}$$

Existînd cupluri de numere naturale care primesc mai mult ca un corespondent prin regula „□", aceasta nu stabilește o operație în $N$.

Nefiind operație, nu mai are sens a căuta dacă este totdeauna posibilă sau nu.

Observăm că în această situație nu sînt permise scrieri ca :

$$3 \square 5 = 0 ; \quad 3 \square 5 = 1 ; \quad 8 \square 7 = 0 ; \quad 4 \square 4 = 6 ; \text{ etc.}$$

# CUPRINS


Capitolul *I.* Recapitularea și completarea cunoștințelor din clasa a II-a . . . . . 3

Capitolul *II.* Adunarea și scăderea numerelor naturale pînă la 1 000 cu trecere peste ordin . . . . . 34

Capitolul *III.* Înmulțirea numerelor naturale, fără și cu trecere peste ordin, cînd unul din factori nu trece de 10 53

Capitolul *IV.* Împărțirea numerelor naturale, fără și cu trecere peste ordin, cînd împărțitorul nu trece de 10 . 73

Capitolul *V.* Exerciții și probleme cu toate operațiile studiate 97

Capitolul *VI.* Numere naturale mai mari decît 1 000 . . . . 101

Capitolul *VII.* Adunarea și scăderea numerelor naturale peste 1 000 . . . . . 103

Capitolul *VIII.* Unități de măsură . . . . . .104

Capitolul *IX.* Noțiuni de geometrie . . . . . 105

Capitolul *X.* Exerciții și probleme recapitulative . . . . 106

Capitolul *XI.* Relații. Funcții. Operații . . . . . 109

*Coli de tipar 9. B.T. 06.08.1980.*
*Format 16/70×100. Apărut 1980.*

*I. P. „Oltenia“ Craiova*
*Str. M. Viteazul, nr. 4*
*Republica Socialistă România*
*Plan 26575/217/1980.*