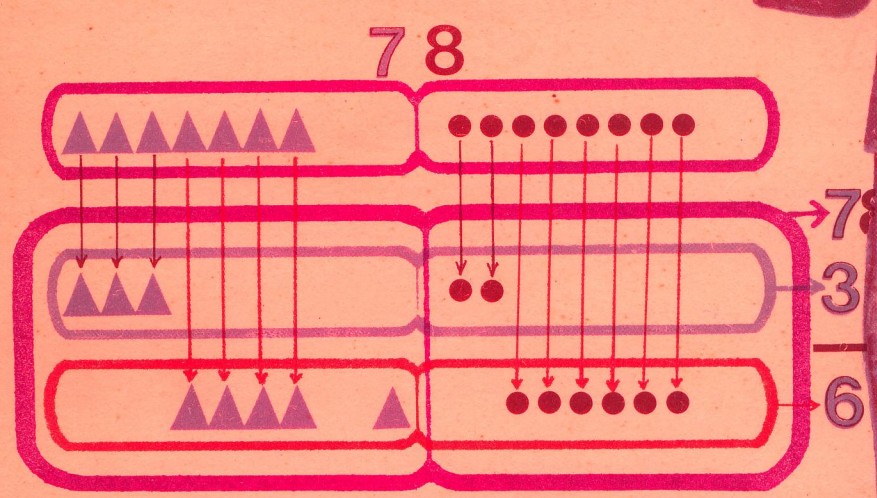
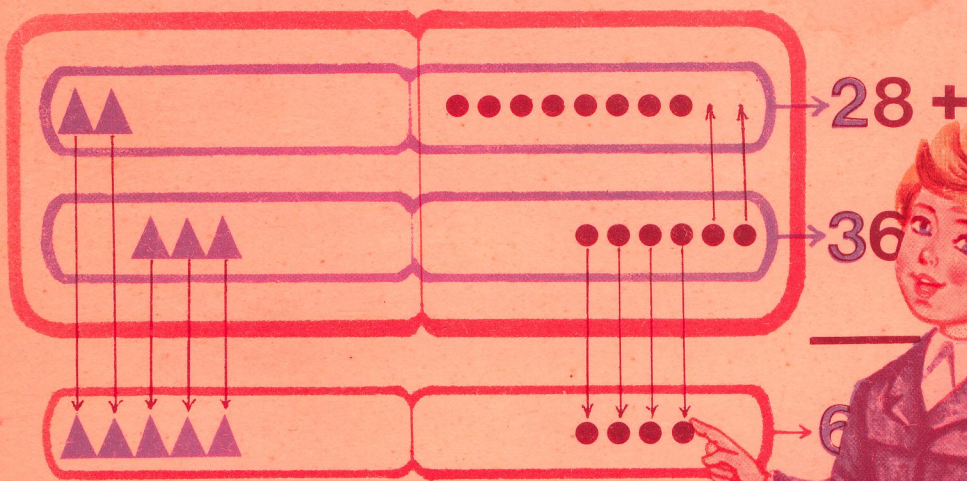




DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a II-a
ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

Prof. DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a II-a

ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Referenți : — cercetător științific doctor **SILVIU TELEMAN**
prof. **IOAN G. BORCA**
prof. **GHEORGHE I. HERESCU**
înv. **VASILE MOTRESCU**

Redactor : **TUDORA GAVRILA**
Tehnoredactor : **ELENA PETRICA**
Coperta : **DUMITRU ȘMALENIC**

CONSIDERAȚII GENERALE

1. CONCEPȚIA DUPĂ CARE A FOST ELABORAT MANUALUL

Principalele trăsături comune diverselor programe de modernizare a studiului matematicii în primii ani de școală decurg din convingerea unanimă că noțiunile despre mulțimi și relații conțin valențe pedagogice a căror fructificare va determina un salt calitativ important în direcția optimizării învățării matematicii.

Un astfel de punct de vedere a fost adoptat și la noi în țară prin programa de matematică pentru clasele I—IV ce se introduce treptat, începînd din anul școlar 1978/79.

Esența noii concepții constă în folosirea, la nivelul de înțelegere al copiilor, a unor cunoștințe despre mulțimi și relații și a terminologiei adecvate, care să ofere posibilitatea explicării, în condiții net superioare decît se putea face pînă acum, a unor noțiuni matematice fundamentale (numere naturale, operații cu numere naturale etc.), a exprimării corecte și comode a ideilor, a folosirii mai eficiente a intuiției, concomitent cu un proces treptat de abstractizare.

Noțiunile despre mulțimi și relații dezvoltă la copii abilitatea desprinderii situațiilor matematice din lumea înconjurătoare, creării de modele matematice și utilizării lor pentru studierea diferitelor aspecte ale realității, găsirii legăturilor esențiale între diversele mărimi din enunțul problemelor, a operațiilor care duc la rezolvarea acestora, mărind capacitatea elevilor de aplicare a matematicii în cele mai diverse situații și educînd, cu un excelent randament, suplețea în gîndire a elevilor.

Modernizarea realizată de noile programe și manuale de matematică la clasele I—IV nu înseamnă înlăturarea din școală a unei matematici și introducerea alteia, cu desăvîrșire nouă. Desigur, există și lucruri noi, dar baza studiului matematicii în aceste clase o formează în continuare cunoștințele zise „clasice“, a căror utilitate a fost dovedită. Nouă este forma de prezentare a acestor cunoștințe, dintr-un alt punct de vedere, într-un context mai general,

mai apropiat de situația matematică actuală, cu o logică care mărește apreciabil posibilitățile de explicare pentru învățători și șansele de înțelegere și asimilare, pentru elevi.

Așa cum am scris și într-un proiect de programă de matematică pentru clasele I—IV pe care l-am propus Ministerului Educației și Învățământului în ianuarie 1978, șocat la prima vedere de multe elemente ce par cu totul noi pentru acest nivel de învățământ, învățătorul se va convinge repede că de fapt noile programe și manuale sistematizează, conștientizează procese psihice și intelectuale care au fost folosite pînă acum în procesul învățării în mod inconsecvent, neexplicit, rămînînd la forme de gîndire și de exprimare echivoce.

Subliniem faptul că, deși contribuie la dezvoltarea posibilităților de exprimare a ideilor, noul sistem de prezentare a cunoștințelor are drept principală consecință nu un spor de verbalizare, ci unul de fundamentare logică a cunoștințelor matematice, pe baza cunoașterii și exersării unor procese ale gîndirii cu caracter foarte general. Ca urmare firească a creșterii conștientizării actului învățării, se vor întări deprinderile de calcul, ale cărui tehnici devin mai bine înțelese.

Cunoștințele despre mulțimi și relații, favorizînd o mai profundă ancorare a cunoștințelor matematice în realitatea înconjurătoare și, totodată, surprinderea aspectelor matematice din această realitate, dau posibilitatea realizării unui salt calitativ în aplicarea principiului intuiției. Prezentul îndrumător și manualul la care se referă constituie o încercare de folosire a materialului didactic după un program în care se comandă și se obține un anumit efect, cu un consum minim de materiale, timp și energie.

Sporind accesibilitatea cunoștințelor matematice pentru masa largă a elevilor, se va reduce eșecul școlar și diferențierea în pregătirea matematică a elevilor.

2. UNELE RECOMANDĂRI GENERALE

a. CUM TREBUIE FOLOSIT MANUALUL

Este necesar ca manualul să fie studiat în întregime înainte de a se începe predarea conținutului la elevi. Aceasta va permite învățătorului să aibă o vedere de ansamblu care îi va ajuta să dozeze just timpul și efortul destinat studierii în clasă a fiecărei teme, precum și orientarea manierei de predare a temelor, astfel încît să favorizeze predarea temelor următoare.

Manualul este, desigur, un ajutor prețios pentru elevi, învățători și părinți. Toți aceștia trebuie să-l studieze cu grijă, acasă. Manualul va fi folosit și în clasă în diferite etape ale lecției, în măsura în care se va considera necesar, fără însă ca lucrul cu manualul să ocupe partea principală a orelor de matematică.

Conținutul manualului va orienta pe învățător cum să-și construiască lecțiile. În nici un caz acesta nu se va limita la a reproduce, fie și pe dinafară, textul manualului, urmînd a-și organiza lecțiile prin contribuția sa personală, alegîndu-și exemple proprii, potrivite condițiilor concrete ale clasei. În acest act de creație o deosebită grijă trebuie avută pentru păstrarea nealterată a conținutului de idei, risc cu atît mai mare cu cît nu există o experiență a masei învățătorilor de construire a lecțiilor într-o astfel de concepție și nici nu s-a asigurat o pregătire corespunzătoare din timpul liceului pedagogic, iar bibliografia ce poate fi găsită nu corespunde încă pe deplin acestui scop.

Textul din manual va fi folosit în cadrul orelor de clasă mai ales pentru fixarea cunoștințelor și rezolvarea independentă a unor exerciții și probleme. Acasă elevul va folosi manualul spre a-și aminti cele explicate de învățător și pentru a rezolva exercițiile și problemele propuse ca temă pentru acasă.

b. SUGESTII ÎN LEGĂTURĂ CU FOLOSIREA MATERIALULUI DIDACTIC

În manual există multe figuri, care au rol efectiv în procesul însușirii noilor cunoștințe. Executarea lor la tablă și în caiete ar putea duce însă la dificultăți de natură a compromite realizarea scopului cărora au fost destinate. De aceea, de regulă, se va evita desenarea lor, fiind înlocuite cu planșe dinainte pregătite (există recomandări concrete la fiecare temă), și cu trusa de material didactic destinat predării operațiilor cu numere naturale. Cu toate acestea, rămîn destule desene care vor trebui făcute la tablă.

În afara materialului didactic sugerat de manual sau propus în acest îndrumător, învățătorul poate folosi, cu mici modificări adesea numai de procedură, materialul tradițional existent în școli, sau poate confecționa altul, imaginat de el.

În ce privește folosirea materialului didactic este bine să se țină seama de faptul că nu abundența de material hotărăște succesul unei lecții. Artă este în a folosi cît mai puțin material și cît mai simplu, dar care să asigure în cel mai înalt grad lămurirea conținutului de idei, a diferitelor procedee, reguli, tehnici de lucru care se stabilesc, și aceasta pentru toți elevii clasei. Nu trebuie uitat că elevii cu aptitudini au prea puțină nevoie de material didactic. Totodată, nu trebuie uitat că materialul didactic nu este decît un mijloc, el nu este un scop în sine, de aceea utilizarea sa trebuie să finalizeze totdeauna cu surprinderea și reținerea aspectelor matematice, desprinse de suportul material prin care s-au introdus.

c. SUGESTII REFERITOARE LA ÎNSUȘIREA LIMBAJULUI MATEMATIC

În legătură cu limbajul matematic pe care trebuie să și-l însușească elevii, cu enunțarea corectă a definițiilor, regulilor și a altor propoziții matematice utilizate, menționăm că ar fi o corvoadă obositoare pentru elevi cerința de a

le memora și enunța pe de rost. Tehnica însușirii trebuie să fie alta. Prin modul de prezentare a cunoștințelor, prin folosirea unui material didactic adecvat, prin exemplele date și aplicațiile făcute, prin munca independentă a elevilor ș.a., trebuie ajuns la o deplină înțelegere de către toți elevii a conținutului matematic prezentat. În timpul explicațiilor și al tuturor discuțiilor cu elevii învățătorul se va exprima îngrijit, în limbaj matematic corespunzător, păstrînd în general mereu aceeași manieră de exprimare a aceluiași idei. El va permite în schimb elevilor să-și exprime gândurile în limbaj propriu, cu condiția păstrării corecte a conținutului. În acest mod, elevii nu se vor simți timorați de teama uitării unor termeni, sau că nu vor reuși să reproducă identic cu formularea învățătorului niște propoziții matematice, dar vor împrumuta pe nesimțite modul de exprimare al învățătorului, în ritmul de însușire propriu fiecărui elev.

Experiența noastră în această direcție a dat rezultate excelente. Un însemnat rol mobilizator s-a dovedit a-l avea evidențierea din cînd în cînd, de ce răspunsul dat de elev este acceptabil, dar formularea învățătorului este preferabilă (precizie, conciziune, eleganță etc.).

d. FIXAREA CUNOȘTINȚELOR PRIN REPETARE

Este lucru cunoscut că elevii de vîrstă mică își însușesc destul de repede cunoștințele, dar le și uită repede, dacă nu le repetă mereu. De acest lucru va trebui ținut seama dacă vrem ca anumite cunoștințe transmise elevilor să fie cu adevărat un bun cîștigat, pe care ei să se poată sprijini în însușirea altor cunoștințe și în diverse aplicații practice.

Respectarea principiului repetării permanente nu trebuie să ducă însă la a continua discuțiile și aplicațiile asupra unei teme, mult timp după ce aceasta a fost însușită de elevi. Experiența arată că în acest mod intervine fenomenul de oboseală, de plictiseală, randamentul activității scade, se ירושה timpul.

Este mult mai productiv a se trece la dezbaterăa altei teme, înainte ca în legătură cu cea veche să apară fenomenul de plictiseală, avînd grijă să se revină periodic, spre a preveni uitarea.

e. INSEMNĂTATEA ECONOMIEI DE CUVINTE ȘI A EVIDENȚIERII CLARE A INVENTARULUI IDEILOR TRANSMISE

Atragem atenția asupra importanței explicării cît mai clare a unei idei, asigurată cu cît mai puține cuvinte. Aceasta obligă învățătorul la o migăloasă pregătire a lecțiilor, dar el va fi răsplătit prin rezultate. Abundența de vorbe la lecții este nedorită. Dacă conținutul a 100 de cuvinte spuse de învățător poate fi exprimat numai prin 30 de cuvinte, atunci cele 70 de cuvinte repre-

zintă un balast de care trebuie „curăţat“ conţinutul transmis, lucru deloc uşor, şi care rămîne a fi făcut de elev. Aceasta este de natură a diminua apreciabil randamentul activităţii învăţătorului la lecţie.

În aceeaşi ordine de idei, menţionăm buna deprindere a unor cadre didactice de a nu-şi încheia pregătirea pentru lecţie înainte de a întocmi o listă în care sînt enumerate ideile cu care trebuie să rămîna elevii din lecţia respectivă, şi deprinderile pe care doresc să le formeze la elevi în cadrul acesteia.

Deşi conţinutul cunoscut, sintetizarea sa sub forma acestui „inventar de idei şi deprinderi“ ridică adesea destule dificultăţi. Odată întocmit, inevitabil existenţa sa îşi va pune amprenta asupra sistematizării lecţiei în clasă.

Dacă în finalul lecţiei elevii sînt în măsură a enumera conţinutul acestui „inventar“, se poate admite că s-a făcut o treabă bună la acea lecţie, deoarece elevii nu puteau reţine tot ce s-a spus într-o oră.

f. FOLOSIREA CU RANDAMENT MAXIM A EXERCIȚIILOR ŞI PROBLEMELOR

Pentru clarificarea şi fixarea cunoştinţelor, pentru antrenarea capacităţii de utilizare independentă a lor, pentru formarea de abilităţi şi deprinderi de aplicare în cele mai diverse situaţii, un mare rol îl joacă rezolvarea exerciţiilor şi problemelor. Pe drept cuvînt, nivelul pregătirii unui elev este exprimat de ceea ce el este în stare să facă singur, pe baza cunoştinţelor dobîndite, şi de aceasta ne dăm seama în procesul rezolvării de exerciţii şi probleme.

În manual s-a acordat multă atenţie formulării exerciţiilor şi problemelor în strînsă legătură cu cunoştinţele conţinute la fiecare temă şi capitol, în scopul adîncirii, uncori chiar a completării lor. De aceea trebuie rezolvate toate exerciţiile şi problemele din manual, ele reprezentînd un minim obligatoriu. Aceasta decurge din faptul că nu s-a mers pe ideea rezolvării rapide a unui număr cît mai mare de exerciţii şi probleme. O astfel de procedură ar face ca mulţi elevi să nu poată „ţine pasul“, creîndu-se decalaje mari de la un elev la altul în ce priveşte cîştigul obţinut din fiecare exerciţiu sau problemă rezolvată în clasă, unii elevi rămînînd, în cel mai fericit caz, cu cîteva tehnici de lucru pe care le aplică mecanic, de obicei după ce li se sugerează din afară procedeul potrivit într-o anumită situaţie.

Principalul însă este ca elevul să găsească singur calea de urmat şi să o poată parcurge independent, asigurîndu-şi autocontrolul. În acest scop pare mai potrivit a se merge pe linia unei maxime conştientizări a procesului de rezolvare a exerciţiilor şi problemelor, în aşa fel încît elevul să poată apoi recunoaşte situaţiile matematice asemănătoare cu care se va întîlni mai tîrziu, situaţii pe care să le poată trata independent, pe baza experienţei anterioare, în mod conştient.

Aşadar, în rezolvarea problemelor nu cît mai mult, ci cît mai bine.

În funcție de situația din fiecare clasă este desigur posibil ca, pentru formarea deprinderilor de rezolvare a anumitor tipuri de exerciții și probleme, numărul celor existente în manual să nu fie suficient pentru unii elevi. Învățătorul va putea să formuleze singur altele, după modelul lor.

3. CITEVA ASPECTE MAI DEOSEBITE CARE CARACTERIZEAZĂ MANUALUL

a. CIT MAI PUȚINE REGULI, DAR APPLICABILE ÎN CIT MAI MULTE SITUAȚII

În redactarea manualului s-au adoptat unele soluții pentru care pledează argumente ce trebuie cunoscute de învățători, pentru ca aceștia să depună cu toată convingerea efortul necesar aplicării lor în condiții de maximă eficiență. Pe de altă parte, cunoașterea unor aspecte mai deosebite și a scopului pentru care au fost introduse va preveni trecerea cu ușurință peste ele, și deci diminuarea efectelor pe care s-a contat.

În această ordine de idei, s-a depus un mare efort pentru a nu fărâmița în cazuri și căzulețe prezentarea unei teme, mai ales la efectuarea operațiilor. Aceasta pentru a nu aglomera mintea copiilor cu reguli greu de memorat și care nu sînt strict necesare, deoarece în situațiile respective copiii pot aplica alte cunoștințe, cu caracter mai general. Dealtfel, practica arată că la efectuarea operațiilor copiii preferă aplicarea acelor procedee care sînt valabile în cît mai multe situații (probabil ca act înconștient de protejare împotriva supraîncărcării). Învățătorii pe care i-am consultat au fost unanimi în aprecierea că elevii, în fața unei operații matematice, nu au prima tendință de a recunoaște din care caz particular face parte, spre a-i aplica tehnica specifică de calcul, ci, dimpotrivă, prima tendință este de a descoperi din ce categorie mai generală face parte, spre a-i aplica procedeul general valabil în situațiile asemănătoare.

Așadar, elevii preferă să se descurce în situații cît mai numeroase, cu reguli cît mai puține. Cîtă vreme nu sînt considerente foarte serioase care să pledeze împotriva, este firesc să respectăm această cerință.

b. RECONSIDERAREA RAPORTULUI INTRE CALCULUL ORAL ȘI CEL SCRIS

În legătură cu ponderea pe care trebuie să o aibă calculul oral și cel scris, cîștigă tot mai mulți adepți ideea că nu este justificat a se da o exagerată extindere calculului oral, a se devansa mult calculul oral înaintea celui scris. Risipa de timp care se produce pe această cale este departe de a fi răsplătită prin operativitatea și siguranța obținute în efectuarea calculului oral. Aceasta

fără a mai lua în considerație că stăpînirea unei excelente tehnici de calcul oral, cu ani în urmă reprezenta un avantaj incomparabil mai mare decît în zilele noastre, cînd, mașinile de calcul de la cele mai simple, la cele mai perfecționate, cunosc o largă răspîndire, dimensiunile și tehnica mînuirii lor făcîndu-le utilizabile pentru masele largi.

Desigur, ar fi cu totul nefericit a se ajunge în situația ca pentru cele mai simple calcule să trebuiască folosită o mașină de socotit sau cel puțin mijloace de calcul în scris. Dar nici antrenarea pînă la rafinament a unor deprinderi de calcul oral, pentru toți elevii, nu se justifică nici ca scop, nici ca volum de energie și timp cheltuite.

Urmare a unor considerente ca cele de mai sus, noul manual are în vedere efectuarea calculului oral și în scris, în același timp. Dealtfel, această cale este urmată în foarte multe țări cu un învățămînt matematic evoluat. Un motiv în plus îl constituie faptul că, deduse pe bază de mulțimi, regulile de calcul oral și în scris decurg simultan, neavînd nici un sens a atrage atenția elevilor doar asupra unora din ele.

**c. NUMIREA ȘI SCRIEREA NUMERELOR NATURALE,
PROBLEMĂ DISTINCTĂ DE ADUNAREA LOR.
IMPLICAȚII ÎN FORMAREA IDEII GENERALE
DE OPERAȚIE INTERNĂ BINARĂ**

În manual se rezolvă mai întîi problema determinării, numirii și scrierii numerelor naturale în sistemul zecimal de numerație în cercul 0—10, 0—100 și 0—1 000, prin introducerea unui procedeu și a unor convenții convenabile acestui scop. Numai după aceea se tratează adunarea în mulțimile respective, ale căror elemente sînt deja cunoscute ca semnificație, denumire, notație etc. În acest mod, operația de adunare asociază, după o anumită regulă, la două elemente dintr-o mulțime, un element din acea mulțime, păstrîndu-se astfel sensul general al operației interne binare într-o mulțime.

După ce elevii cunosc numerele naturale de la 0 la 10, ei fac adunarea în cercul 0—10 ca operație internă binară în mulțimea

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

fără a se introduce explicit această noțiune.

Adunări ca $2 + 3 =$, $5 + 4 =$, $1 + 6 =$, sînt posibile în această mulțime, iar adunări ca $4 + 9 =$, $8 + 7 =$, $6 + 5 =$, nu sînt posibile în mulțimea respectivă.

După ce au fost introduse numerele de la 10 la 100, se face adunarea în cercul 0—100, ca operație internă binară în mulțimea

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, 98, 99, 100\}.$$

Adunări ca $21 + 46 =$, $39 + 45 =$, sînt posibile în această mulțime, iar adunări ca $81 + 56 =$, $23 + 98 =$, nu sînt posibile în mulțimea respectivă.

Același sistem de lucru se folosește și la trecerea peste sută.

a strica organizarea în structuri zecimale ale acestora, să căutăm un mijloc de obținere a mulțimilor reuniune sau diferență gata organizate cu structuri numerice zecimale, spre a le putea numi cu ușurință numărul elementelor.

Un astfel de mijloc s-a dovedit a fi utilizarea mulțimilor model sub forma figurilor numerice care le-am introdus și folosit pe larg în manual, care au dus la rezultate surprinzător de suple, păstrînd nealterat conținutul științific și sugerînd, pe un excelent suport intuitiv, regulile de adunare și scădere oral și în scris a numerelor naturale. Totodată, ele au permis imaginarea unui material didactic extrem de simplu și de eficient în scopul predării adunării și scăderii numerelor naturale, sub forma trusei pentru predarea, pe bază de mulțimi, a operațiilor cu numere naturale la clasele I—IV.

e. PE PRIMUL PLAN IDEEA DE ÎNMULȚIRE ȘI ÎMPĂRȚIRE, ȘI APOI TABLA ÎNMULȚIRII ȘI A ÎMPĂRȚIRII

Conținutul manualelor de pînă acum referitor la înmulțirea și împărțirea numerelor naturale se rezumă aproape numai la tabla înmulțirii și a împărțirii.

Practica școlară arată însă că pînă la urmă, tabla înmulțirii și a împărțirii trebuie învățate pe de rost, fiind foarte incomod [a cere unui elev să „deducă” produsul sau cîțul (8×9 de pildă, sau $63 : 7$). Tot practica școlară dovedește că o dată învățate, tabla înmulțirii și a împărțirii se uită repede, de îndată ce intervin perioade (chiar nu prea lungi) în care elevul nu este pus în situația de a le utiliza.

În consecință, a reduce cunoștințele elevilor de clasa a II-a asupra înmulțirii și împărțirii doar la cunoașterea tablei înmulțirii și împărțirii, înseamnă a cheltui cu randament scăzut prea mult timp, elevii nedobîndind suficiente idei durabile, de perspectivă, care să-i ajute a înțelege esența operațiilor respective, astfel încît să fie capabili să recunoască situațiile matematice în care intervin aceste operații, să fie capabili deci să rezolve cu ușurință probleme de înmulțire și împărțire.

f. NECESITATEA UNEI REGULI DE ÎMPĂRȚIRE CARE SĂ NE CONDUCĂ LA OBȚINEREA CÎTULUI

În legătură cu modul de prezentare a împărțirii, cîtă vreme elevii nu cunoșteau noțiuni ca acelea de submulțime, mulțimi disjuncte etc., nu li se putea prezenta ca mijloc de obținere a cîtului, alegerea unei mulțimi model pentru deîmpărțit și separarea elementelor sale în submulțimi disjuncte între ele (ajungînd fie la procedeul împărțirii prin „cuprindere”, fie la acela al împărțirii prin „părți egale”).

Rămînea alternativa calculării cîtului cu ajutorul scăderii repetate. Dar manualul de pînă acum nu folosea nici această alternativă. El se rezuma doar

să arate cum putem verifica prin înmulțire dacă un anumit număr este, sau nu, cîțul unei anumite împărțiri. Elevului nu-i rămînea decît calea găsirii cîtului prin încercări. El era lăsat astfel fără un procedeu de obținere a cîtului și fără unele cunoștințe **care** l-ar fi ajutat să pătrundă mai adînc sensul operației de împărțire, să rezolve mai ușor anumite probleme de împărțire.

În noul manual s-a căutat să se soluționeze aceste probleme, la nivelul de înțelegere al copiilor.

4. STRUCTURA ÎNDRUMĂTORULUI

Intitulat „MATEMATICĂ PENTRU CLASA a II-a — ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI“, el nu a fost conceput ca avînd rolul principal de a da indicații asupra modului cum trebuie înțeles conținutul manualului, ci ca avînd menirea să orienteze pe învățător cum trebuie să-și desfășoare activitatea cu elevii, sub toate aspectele, pentru ca aceștia să-și însușească în condiții cît mai bune conținutul noii programe de matematică. Desigur, în acest context se integrează și lămuririle necesare înțelegerii depline a textului din manual și folosirii eficiente a manualului în clasă și acasă.

În scopul de mai sus, îndrumătorul conține aceleași capitole și teme, ca și manualul, și la fel intitulate și numerotate. Între numerotarea figurilor existente în îndrumător, și a celor existente în manual, nu este nici o legătură.

La fiecare capitol îndrumătorul conține, în general:

A. Scurte observații asupra conținutului

1. Obiectivele prevăzute de programa școlară.
 2. Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii.
- Termeni și notații noi.

B. Indicații metodice pentru predarea temelor (Număr de ore, orientativ = ...)

Tema. Scopul. Material didactic: pentru învățător; pentru elevi.

Recomandări metodice pentru predarea temei.

a. Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului. Muncă independentă.

b. Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului. Exerciții și probleme din manual: propuse a fi rezolvate în clasă; propuse a fi rezolvate acasă.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse în manual la tema...

Notă: Temele, care se pot desfășura după o tehnologie didactică asemănătoare unora care au fost prezentate anterior, nu au fost dezvoltate din nou în amănunțime, ci s-a adăugat doar ceea ce s-a considerat necesar, pentru ca învățătorul să-și poată construi lecția cu maximum de eficiență.

I. RECAPITULAREA ȘI COMPLETAREA CUNOȘTINȚELOR DIN CLASA I

Capitolul 1

NOȚIUNI DESPRE MULȚIMI

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMĂ ȘCOLARĂ

Noțiunile despre mulțimi studiate în clasa I.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

1° Noțiunile de *mulțime* și *element* percepute intuitiv, cu utilizarea curentă a termenilor corespunzători. *Apartenența și neapartenența* unui element la o mulțime, exprimate cu terminologia respectivă, formate de asemenea pe cale intuitivă.

Elevii nu trebuie să facă aici teorie, ei vor trebui doar să-și exprime în limbaj corespunzător comentariile în legătură cu exemplele puse în discuție, și, mai ales, să găsească ei exemple care să ilustreze diversele situații cerute de învățător.

Diagrama unei mulțimi, figurată printr-o linie închisă, elementele mulțimii fiind figurate prin puncte în interiorul liniei închise. Scrierea în diagramă, lângă punct, a *simbolului* elementului pe care îl reprezintă acest punct, în situațiile în care acest lucru ușurează înțelegerea ideilor, sau exprimarea gândirii copiilor.

Elevii trebuie să cunoască precizarea unei mulțimi prin *indicarea tuturor elementelor* sale, sau prin *indicarea proprietății caracteristice* a mulțimii, adică acele proprietăți pe care le au toate elementele mulțimii și numai ele.

Se va cunoaște că *ordinea* în care sînt luate elementele unei mulțimi nu are nici o însemnătate, iar indicarea unui același element *de mai multe ori* în precizarea mulțimii, nu are rost.

2° Situațiile în care se poate găsi o mulțime față de o mulțime: fără elemente comune, sau *disjuncte*; *cu unele elemente comune* (fiecare mulțime avînd și elemente necomune cu cealaltă); o mulțime *inclusă* într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi; mulțimi *egale*.

Se va evita exprimarea: „Situația în care se află o mulțime față de *altă* mulțime”, deoarece, în cazul mulțimilor egale, se ia în considerație o mulțime față de ea însăși și nu față de o altă mulțime.

Elevii vor cunoaște reprezentarea a două mulțimi, în orice situație s-ar afla, cu ajutorul diagramei generale (fig. 1), figurînd elementele în zonele corespunzătoare, ca în figurile 2, 3, 4 și 5.

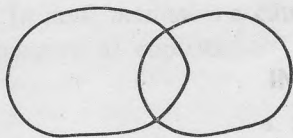


Fig. 1

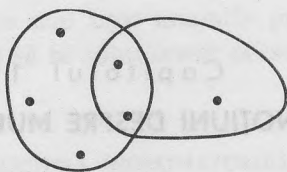


Fig. 2

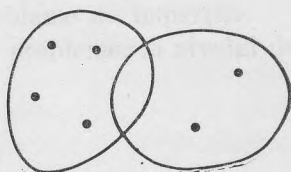


Fig. 3

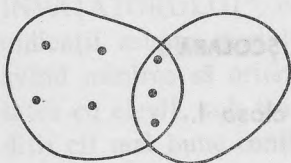


Fig. 4

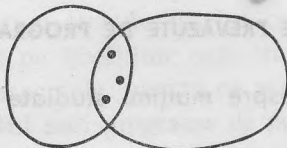


Fig. 5

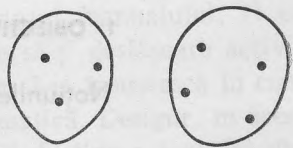


Fig. 6

În cazul mulțimilor disjuncte se vor face și diagrame ca în figura 6, iar pentru o mulțime inclusă într-o mulțime, diagrame ca în figura 7.

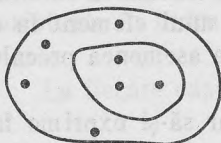


Fig. 7

În legătură cu mulțimile egale se va observa că nu avem de fapt două mulțimi, ci o singură mulțime, indicată în moduri diferite.

3° Mulțimile ce se pot obține cu două mulțimi date, cunoscînd și formulările verbale:

Intersecția unei mulțimi A cu o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin și mulțimii A și mulțimii B (și numai din acestea).

Diferența dintre o mulțime A și o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin mulțimii A , și nu aparțin mulțimii B (și numai din acestea).

Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A se definește în mod asemănător.

Reuniunea unei mulțimi A cu o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile A și B (și numai din acestea).

Observarea *comutativității* intersecției și reuniunii mulțimilor și a *necomutativității* diferenței mulțimilor.

4° Mulțime *pereche*, mulțime *cu un singur element*, mulțime *vidă*. Ele se vor obține cu ocazia intersecției sau a formării diferenței de mulțimi, dar se vor da și exemple de astfel de mulțimi care nu se obțin pe aceste căi.

Se vor face exerciții de alcătuire a unor noi mulțimi cu ajutorul unor mulțimi date, cînd acestea se află și în alte situații, nu numai disjuncte.

Termeni ce vor fi folosiți: mulțime; element; aparține, nu aparține; diagramă; simbol; proprietate caracteristică; mulțimi disjuncte; mulțime inclusă într-o mulțime, submulțime, parte; intersecție; diferență; reuniune; comutativitate; mulțime pereche; mulțime vidă.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL I

(Număr de ore, orientativ = 5)

TEMA 1: MULȚIME, ELEMENT, APARTENENȚĂ

Scop: Împrospătarea noțiunilor și a termenilor corespunzători. Folosirea diagramelor și simbolurilor. Indicarea mulțimii prin lista elementelor și prin proprietate caracteristică.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile 8, 9 și 10: tabla magnetică; piese metalice cu forma pătrat, dreptunghi, triunghi, cerc, fiecare în patru exemplare, respectiv de culoare roșie, verde, albastră, neagră. Tabla magnetică poate fi înlocuită cu un „flanelograf” (stofă aspră întinsă pe un cadru de lemn sau de carton, folosind în locul pieselor metalice, piese din carton având pe o parte lipit postav. Piesele, așezate cu postavul pe stofa cadrului, se mențin chiar dacă acesta stă în poziție aproape verticală); cretă colorată.

Pentru elevi: Ovale confecționate din sîrmă; piese asemănătoare cu cele din trusa folosită de învățător, confecționate din carton, puse într-un plic.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

1) **Recunoașterea atributelor:** formă, culoare.

Folosind planșa cu figura 8, apoi piese din trusa cu figuri geometrice, se cere elevilor să recunoască forma figurii sau piesei respective.

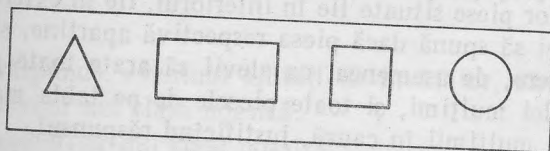


Fig. 8

Din planșa cu figura 9 vor fi recunoscute culorile: roșu, verde, albastru, galben, negru ș.a.

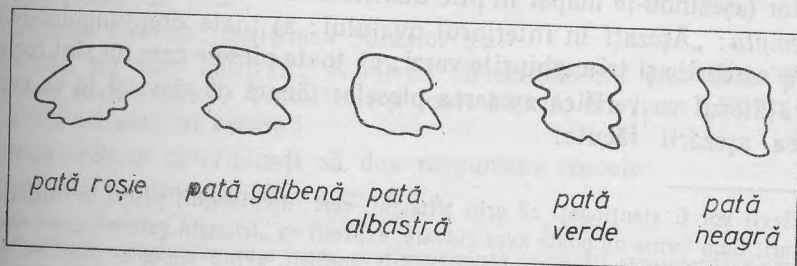


Fig. 9

Planșa cu figura 10 va folosi pentru recunoașterea a două atribute: forma și culoarea. Elevii vor răspunde, arătând pe planșă desenul potrivit: „Acesta este un triunghi galben“ etc.¹

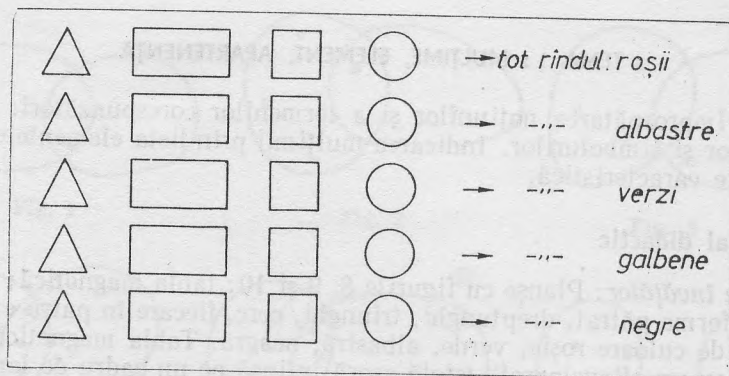


Fig. 10

Exerciții de recunoaștere a atributelor respective vor fi făcute prezentând piese din trusă și, punând elevii să aleagă din plicul cu piesele decupate din carton care le-a fost dat la începutul orei, piesa care are atributele cerute de învățător.

2) **Alcătuire de mulțimi.** Se vor așeza pe tabla magnetică diverse piese: triunghiuri, dreptunghiuri, pătrate, cercuri, de diferite culori. Apoi, învățătorul închide succesiv, printr-o linie desenată cu cretă colorată: mulțimea pieselor roșii; mulțimea triunghiurilor etc., de fiecare dată cerând elevilor să recunoască proprietatea după care s-a format mulțimea.

Arătând elevilor piese situate fie în interiorul, fie în exteriorul liniei desenate, se cere ca ei să spună dacă piesa respectivă aparține, sau nu, mulțimii formate. Se va cere, de asemenea, ca elevii să arate toate piesele care sînt elemente ale acelei mulțimi, și toate piesele de pe tabla magnetică care nu sînt elemente ale mulțimii în cauză, justificînd răspunsul.

După cîteva exerciții de acest fel, menite să amintească noțiunile și termenii folosiți, se va propune elevilor să așeze pe bănci piesele din plicurile lor, și ovalul din sîrmă. La solicitarea învățătorului, copiii vor așeza în interiorul ovalului, succesiv, toate piesele care posedă atributele menționate de învățător (așezîndu-le înapoi în plic înainte de a se formula o nouă solicitare).

Exemplu: „Așezați în interiorul ovalului: a) toate dreptunghiurile roșii; b) toate cercurile și triunghiurile verzi; c) toate piesele care nu sînt roșii“ etc.

Învățătorul va verifica așezarea pieselor făcută de elevi și le va cere justificarea așezării făcute.

¹ Elevii vor fi atenționați că prin triunghi, cerc, dreptunghi, pătrat se înțelege forma unei figuri. Cum forma nu poate avea culoare, expresii ca „triunghi galben“, „cerc roșu“ etc., constituie abuz de limbaj în scopul prescurtării vorbirii, avînd sensul de piesă sau desen cu forma de triunghi, cerc etc., colorată în galben, roșu etc.

Se va desena pe tablă figura 11, elevii trebuind să spună care litere din cele scrise pe tablă aparțin mulțimii A și care nu aparțin acestei mulțimi. În fine, mulțimea A va fi scrisă:

$$A = \{a, b, c\}$$

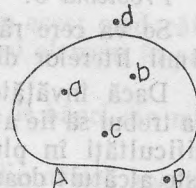


Fig. 11

* Faptul¹ că a aparține mulțimii A se notează $a \in A$. La fel $b \in A$; $c \in A$ (citind „ a aparține lui A “ etc.).

* Faptul că d nu aparține mulțimii A se notează $d \notin A$ (citind „ d nu aparține la A “). La fel $p \notin A$.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se strânge materialul didactic distribuit la elevi și se deschid manualele la prima temă.

După un scurt răgaz acordat elevilor pentru a privi prima figură, învățătorul va citi textul din manual, elevii urmărind pe cărțile lor cele citite. Vor fi solicitați apoi să răspundă la întrebările existente în lecție. În legătură cu discuțiile ce vor fi ocazionate de prima figură nu pot apărea dificultăți.

Se vor evita întrebările de felul: „Ce este o mulțime?“, „Ce este un element?“, „Ce înseamnă a aparține?“ etc., deoarece nu pot fi formulate răspunsuri satisfăcătoare, orice răspuns înlocuind, în esență, un cuvânt prin altul sinonim.

În aceeași manieră vor fi abordate și primele trei probleme, urmînd ca la problemele 4 și 5 elevii să caute soluțiile acasă, iar discutarea lor în clasă să aibă loc la începutul orei următoare.

Învățătorul va propune spre analiză și alte probleme asemănătoare cu acestea, solicitînd cît mai multe exemple de la elevi.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la temă¹

Problema 1.

Elevii vor răspunde, eventual ajutați de învățător, dînd exemple ca:

Mulțimea elevilor din clasa noastră.

Mulțimea tablourilor din clasa noastră.

Mulțimea elevilor ce stau în banca a doua în clasa noastră.

Mulțimea claselor de elevi din școala noastră. (Atenție! Aici elementele sînt la rîndul lor mulțimi.)

Precizăm, avînd în vedere experiența noastră, că elevii au tendința să dea răspunsuri de felul:

Mulțimea elevilor; mulțimea băncilor ș.a.

Acestea nu sînt mulțimi, deoarece elementele nu sînt bine precizate. Care elevi și care bănci? Toți elevii și toate băncile din lume? Puțin probabil că aceasta s-a avut în vedere!

Elevii trebuie determinați să dea răspunsuri corecte:

Mulțimea elevilor din clasa noastră ș.a.

¹ Conținutul alineatelor care încep cu * reprezintă indicații suplimentare pentru învățător, care nu vor fi transmise elevilor.

Problema 3.

Se va cere răspunsul complet. De exemplu: „ t este un element al mulțimii literelor din cuvîntul „carte““.

Dacă învățătorul va dori să analizeze și alte probleme asemănătoare, va trebui să fie atent la cuvîntul ales. De exemplu, cuvîntul „caiet“ nu creează dificultăți în plus față de cuvîntul „carte“. În schimb, cuvîntul „mama“ este alcătuit doar din două litere, m și a și nu din patru, așa cum s-ar putea crede.

Problema 4.

Elementele mulțimii A sînt cercul roșu, pătratul negru și pătratul roșu. Cercul negru și triunghiul albastru nu aparțin mulțimii A , deoarece nu se află în interiorul liniei desenate cu albastru.

Problema 5.

Elementele ce aparțin mulțimii B sînt literele: b ; c ; d , iar cele care aparțin mulțimii C sînt literele: a ; c ; f .

Putem scrie mulțimile B și C astfel:

$$B = \{b; c; d\}; \quad C = \{a; c; f\}.$$

Literele m și p nu aparțin nici mulțimii B , nici mulțimii C .

$$* m \notin B; \quad m \notin C; \quad p \notin B; \quad p \notin C.$$

TEMA A 2-A: SITUAȚII ÎN CARE SE POT AFLA DOUĂ MULȚIMI

Scop: Să se înțeleagă care elemente sînt comune mai multor mulțimi și ce este aceea zonă comună, în diagramă. Să poată fi recunoscută situația în care se află o mulțime față de o mulțime și să se poată da exemple de mulțimi aflate într-o situație dată: cu unele elemente comune; fără elemente comune sau disjuncte; o mulțime inclusă într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi; mulțimi egale.

Material didactic

Pentru profesor: Tabla magnetică cu piesele menționate; cretă colorată; pentru exemplificări se folosesc și elevii din clasă.

Pentru elevi: Același ca la tema anterioară, la care se adaugă un oval din sîrmă, de altă culoare față de cel existent, și de altă mărime, astfel încît ele să poată fi așezate unul în interiorul celuilalt pe bancă, și să rămîină suficient loc pentru a așeza piese în zona cuprinsă între ele (în complementară).

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1) **Mulțimi cu unele elemente comune.** Se cere ridicarea în picioare a copiilor care stau în primele două bănci din fiecare rînd. Fiecare elev ridicat în picioare este solicitat să-și spună numele. Cîțiva elevi din clasă vor spune numele tuturor elevilor care sînt elemente ale mulțimii elevilor ce stau în primele două bănci din fiecare rînd.

Numai după ce atenția întregii clase a fost îndreptată în acest mod către mulțimea respectivă privită ca un „tot“, cît și asupra fiecărui element în parte, elevii care au stat în picioare se vor așeza în bănci.

Același exercițiu se face cu mulțimea elevilor din rîndul de bănci din mijloc (presupunînd trei rînduri de bănci).

Se observă că elevii din primele două bănci ale rîndului din mijloc aparțin ambelor mulțimi. Astfel de elemente sînt numite *elemente comune* celor două mulțimi.

Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor care sînt elemente comune pentru mulțimile menționate (toți elevii clasei erau așezați în bănci la sfîrșitul celui de-al doilea exercițiu).

Cîțiva elevi din clasă vor spune numele elevilor care sînt elemente comune pentru mulțimile noastre. Toți elevii se reazăză în bănci.

Se formulează concluzia că mulțimea elevilor care stau în primele două bănci, și mulțimea elevilor care stau în rîndul de bănci din mijloc, sînt *mulțimi cu unele elemente comune*.

Cîțiva elevi vor repeta această concluzie. Învățătorul cere ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din primele două bănci, dar nu aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc. Elevii se reazăză în bănci.

Se solicită ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc, dar nu aparțin mulțimii elevilor care stau în primele două bănci. Se reazăză elevii în bănci.

Activități de acest fel s-au dovedit foarte antrenante pentru copii și deosebit de eficiente pentru însușirea sau împrăștierea cunoștințelor legate de situațiile în care poate fi o mulțime față de o mulțime, de mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date etc. Ele se vor repeta în diverse variante pînă la însușirea conținutului dorit.

Se poate cere elevilor să formuleze ei exemple de tipul celui descris mai sus.

Învățătorul execută pe tablă figura 12.

Elevii spun elementele mulțimii A , pe care învățătorul le poate scrie pe tablă:

$$A = \{b, d, o\}.$$

În mod analog se procedează cu mulțimea B :

$$B = \{d, o, t, u, p\}.$$

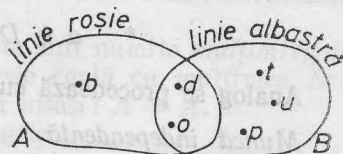


Fig. 12

Se cere elevilor să spună dacă mulțimile A și B au elemente comune. Sînt indicate literele d și o , motivînd: „ d este element comun mulțimilor A și B deoarece aparține mulțimii A și mulțimii B “. La fel despre o . „ b nu este element comun mulțimilor A și B , deoarece aparține mulțimii A dar nu aparține mulțimii B “ ș.a.m.d.

* Se notează (se enunță numai verbal, dacă aceste notații nu se folosesc):

$$b \in A, d \in A, o \in A, t \notin A, u \notin A, p \notin A,$$

$$b \notin B, d \in B, o \in B, t \in B, u \in B, p \in B.$$

Partea figurii unde sînt așezate elementele comune este numită „zonă comună“ și se hașurează ca în figura 13.

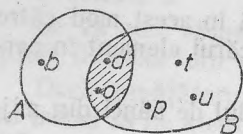


Fig. 13

Muncă independentă

Se propune elevilor să așeze pe bănci ovalele din sîrmă, așa cum arată figura 13. Se cere apoi să se așeze la locul potrivit piesele din plic, care: sînt elemente ale mulțimii A a tuturor triunghiurilor din plic; sînt elemente ale mulțimii B a tuturor pieselor albastre din plic.

Triunghiurile albastre vor fi așezate în zona comună. Se verifică modul în care a fost îndeplinită sarcina dată elevilor.

Pentru corectarea execuției, învățătorul realizează el tema, cu piesele metalice pe tabla magnetică. Ovalele le desenează cu cretă colorată.

2) **Mulțimi fără elemente comune, sau disjuncte.** Se va proceda analog cu situația descrisă mai sus, alegînd în mod potrivit mulțimile. De exemplu, se pot lua: mulțimea elevilor ce stau în rîndul din mijloc și mulțimea elevilor care stau în rîndul de bănci de lângă ferestre.

După ce se analizează suficiente exemple în acest fel, se execută de către învățător la tablă, succesiv, figurile 14 și 15.

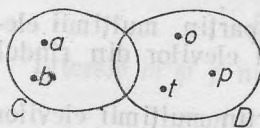


Fig. 14

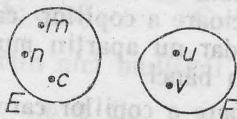


Fig. 15

Elevii vor spune, de fiecare dată, elementele fiecăreia din mulțimile C și D, apoi E și F, constatînd că nu există elemente comune lui C cu D, nici lui E cu F. De aceea, zona comună fie că nu conține elemente, fie că nu mai apare în diagramă.

Învățătorul notează pe tablă:

$$C = \{a, b\};$$

$$D = \{o, p, t\};$$

$$* \quad a \in C, b \in C, o \notin C, p \notin C, t \notin C;$$

$$* \quad a \notin D, b \notin D, o \in D, p \in D, t \in D.$$

Analog se procedează cu mulțimile E și F.

Muncă independentă

Se cere ca elevii să așeze pe bănci ovalele din sîrmă, așa cum arată figura 14. După aceea se propune așezarea la locul potrivit a pieselor din plicurile lor, care: sînt elemente ale mulțimii A a tuturor triunghiurilor din plic; sînt elemente ale mulțimii P a tuturor pătratelor din plic.

Cum nici un triunghi nu este în același timp și pătrat, învățătorul verifică dacă elevii nu au așezat piese în zona comună.

Pentru corectare, învățătorul execută tema pe tabla magnetică.

Se așază apoi ovalele de sîrmă pe bănci, ca în figura 15. Se propune elevilor să plaseze și acum, la locul potrivit, elementele mulțimilor A și P formate mai sus. Se verifică îndeplinirea sarcinii făcînd aprecierile necesare.

Pentru corectare, învățătorul execută tema pe tabla magnetică.

3) **Mulțime inclusă într-o mulțime.** Se va folosi aceeași procedură ca mai sus, exemple de mulțimi putîndu-se alege: mulțimea elevilor din primele două bănci; mulțimea elevilor din primele două bănci ale rîndului din mijloc.

În locul figurilor 14 și 15, învățătorul face acum pe tablă, succesiv, figurile 16 și 17. După ce elevii identifică elementele mulțimilor de litere E și P , se scrie pe tablă:

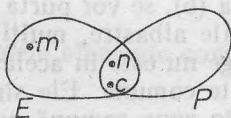


Fig. 16

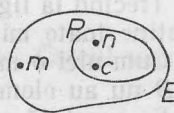


Fig. 17

$$E = \{m, n, c\}; \quad P = \{n, c\};$$

$$* n \in P; n \in E; c \in P; c \in E.$$

Observându-se că orice element al mulțimii P este și element al mulțimii E , se spune despre mulțimea P că este *inclusă* în mulțimea E . Se mai spune că mulțimea P este *submulțime* sau *parte* a mulțimii E .

$$* m \in E; m \notin P.$$

* Notăția $P \subset E$, (citită „mulțimea P este inclusă în mulțimea E ”). Se observă că diagrama din figura 17 este mai sugestivă pentru incluziune.

Muncă independentă

Așezându-se pe bănci ovalele din sîrmă așa cum arată figura 16, se cere așezarea la locul potrivit a pieselor din plicuri care sînt elemente ale: mulțimii A a triunghiurilor din plic; mulțimii R a triunghiurilor roșii aflate în plic.

Cîtiva elevi, cu ocazia verificării modului în care au executat sarcina dată, justifică așezarea pieselor. Se execută tema pe tabla magnetică.

Se cere apoi îndeplinirea aceleiași sarcini, dar cu așezarea ovalelor din sîrmă ca în figura 17. Pentru corectare se execută tema pe tabla magnetică.

4) Mulțimi egale. Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor clasei. Se reazăză în bănci.

Se cere apoi ridicarea în picioare a tuturor elevilor din clasă care au depășit vîrsta de 5 ani.

Se constată ridicarea din nou a tuturor elevilor din clasă.

Așadar, mulțimea A a elevilor clasei noastre, și mulțimea B a elevilor clasei noastre care au depășit vîrsta de 5 ani, sînt formate exact din aceleași elemente.

Mulțimile formate exact din aceleași elemente sînt numite *mulțimi egale*.

Se notează $A = B$ (citind: „mulțimea A este egală cu mulțimea B ”).

Se observă că orice mulțime este egală cu ea însăși: $A = A$.

Elevii vor da și alte exemple de mulțimi egale.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschid cărțile la tema a 2-a: „Situațiile în care se pot afla două mulțimi”. Privind figura (a), se vor purta discuții cu elevii urmărind etapele:

1° Cunoașterea elementelor mulțimii A : mingile mici (albastre și roșii).

2° Cunoașterea elementelor mulțimii B : mingile roșii (mari și mici).

3° Se identifică elementele ce aparțin și mulțimii A , și mulțimii B : mingile mici și roșii. Ele sînt elemente comune celor două mulțimi.

4° Fiecare din mulțimile A și B are și elemente care nu sînt comune cu cealaltă mulțime: mingea mare și roșie nu aparține mulțimii A ; mingile mici și albastre nu aparțin mulțimii B .

5° Se formulează concluzia că A și B sînt mulțimi cu unele elemente comune.

Trecînd la figura (b), se vor purta discuții asemănătoare. Aici mulțimea C conține toate mingile albastre, mulțimea B conține toate mingile roșii.

Cum nici o minge nu este în același timp și albastră și roșie, mulțimile C și B nu au elemente comune. Ele sînt mulțimi disjuncte.

Se constată că în zona comună nu sînt figurate elemente.

În figura (c) avem mulțimea C a mingilor albastre, și mulțimea D a tuturor mingilor din figură. Se vede că fiecare minge albastră din C , fiind minge aparține și mulțimii D .

Învățătorul va citi din manual, elevii urmărind pe cartea lor, textul referitor la mulțimile egale.

Se va cere elevilor, în timpul lecturii, să execute cele cerute în textul citit.

Vor fi citite în continuare și rezolvate problemele: 1; 2; 3; 4.

Se vor propune ca temă acasă problemele: 5; 6; 7; 8; 9. Rezolvarea lor va fi discutată, fără grabă, în lecția următoare.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 2-a

Problema 5.

Elementele comune sînt literele: c, a, t, e .

* Notînd: $A = \{c, a, r, t, e\}$; $B = \{c, a, i, e, t\}$ avem:

$$\begin{array}{llllll} c \in A, & a \in A, & t \in A, & e \in A, & r \in A, & i \notin A; \\ c \in B, & a \in B, & t \in B, & e \in B, & r \notin B, & i \in B. \end{array}$$

Problema 8.

Elementele mulțimii literelor din cuvîntul car: $c; a; r$.

Elementele mulțimii literelor din cuvîntul rac: $r; a; c$.

Se vede că cele două mulțimi sînt formate din aceleași elemente (luate doar în altă ordine). Deci, ele sînt egale.

* Notînd: $E = \{c, a, r\}$; $F = \{r, a, c\}$ avem: $E = F$

În adevăr:

$$\begin{array}{lll} c \in E, & a \in E, & r \in E; \\ c \in F, & a \in F, & r \in F. \end{array}$$

Problema 9.

Figura 18 face corelarea cu cea din manual.

a) Figura 19. Submulțimile sînt două cîte două disjuncte.

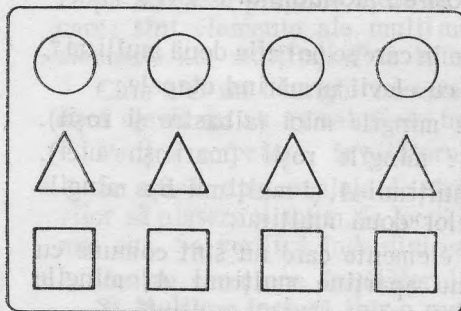


Fig. 18

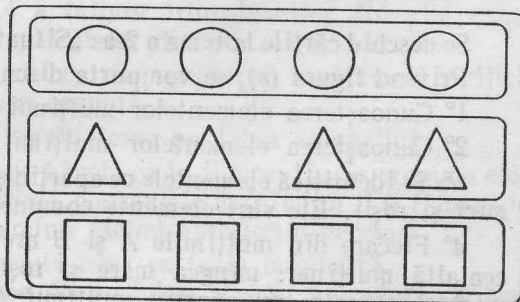


Fig. 19

- b) Figura 20. Idem.
c) Figura 21. Submulțimile sînt cu unele elemente comune. Cercul verde este elementul comun.

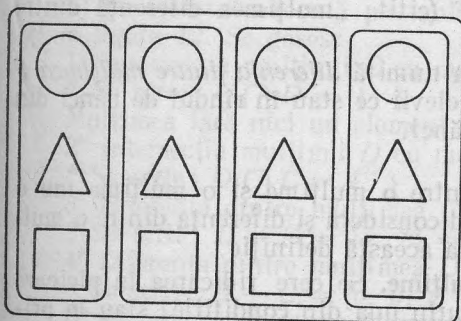


Fig. 20

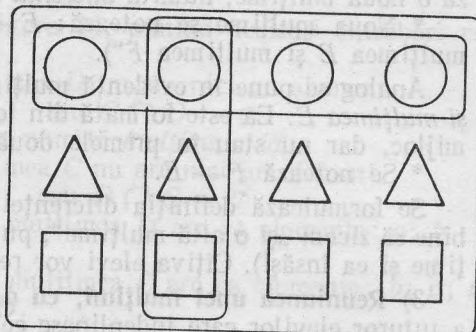


Fig. 21

Notă pentru figurile: 18, 19, 20, 21:

Culoarea din manual este:

- coloana 1 — negru
- coloana a 2-a — verde
- coloana a 3-a — roșu
- coloana a 4-a — albastru

TEMELE 3 ȘI 4: MULȚIMI CE SE POT OBTINE CU DOUĂ MULȚIMI DATE. MULȚIME VIDĂ

Scop: Să se cunoască definițiile intersecției, diferenței și reuniunii a două mulțimi, acestea putînd fi efectiv formate cu ajutorul unor mulțimi date. Să poată fi folosite diagramele ca metodă de lucru și ca mijloc de înțuiție.

Material didactic

Același ca la tema anterioară.

Recomandări metodice pentru predarea temelor

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Se reiau exemplele de la tema a 2-a după o procedură asemănătoare, dar se valorifică alte aspecte:

1) **Intersecția unei mulțimi cu o mulțime.** Mulțimea E a elevilor din primele două bănci, cu mulțimea F a elevilor din rîndul de bănci de la mijloc, au ca elemente comune toți elevii ce stau în primele două bănci în rîndul din mijloc. Ei formează o nouă mulțime, numită *intersecția celor două mulțimi*.

Se formulează definiția intersecției a două mulțimi, pe care o vor repeta cîțiva elevi.

* Se notează noua mulțime: $A \cap B$ (citit „intersecția mulțimii A cu mulțimea B ”).

2) **Diferența dintre o mulțime și o mulțime.** Se ridică în picioare elevii care stau în primele două bănci, dar nu stau în rîndul de bănci din mijloc. Se observă că ei aparțin mulțimii E , dar nu aparțin mulțimii F . Ei formează o nouă mulțime, numită *diferența dintre mulțimea E și mulțimea F* .

* Noua mulțime se notează: $E - F$ (citit: „mulțimea diferență dintre mulțimea E și mulțimea F ”).

Analog se pune în evidență mulțimea numită *diferența dintre mulțimea F și mulțimea E* . Ea este formată din toți elevii ce stau în rîndul de bănci din mijloc, dar nu stau în primele două bănci.

* Se notează $F - E$.

Se formulează definiția diferenței dintre o mulțime și o mulțime (nu e bine să zicem „și o altă mulțime”, putînd considera și diferența dintre o mulțime și ea însăși). Cîțiva elevi vor repeta această definiție.

3) **Reuniunea unei mulțimi, cu o mulțime.** Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor care îndeplinesc cel puțin una din condițiile: stau în primele două bănci; stau în rîndul de bănci din mijloc. Ei formează o nouă mulțime, numită *reuniunea mulțimilor E și F* .

Se observă că unii elevi îndeplinesc doar una din cele două condiții. Alții (cei care sînt elemente comune), le îndeplinesc pe amîndouă.

* Se notează: $E \cup F$ (citind: „reuniunea mulțimii E cu mulțimea F ”).

Se formulează definiția reuniunii unei mulțimi cu o mulțime pe care o repetă cîțiva elevi.

Alte exemple

a) Învățătorul execută pe tablă figura 12 (și elevii în caiete). Cere apoi elevilor să găsească elementele următoarelor mulțimi:

1° Intersecția mulțimii A cu mulțimea B . Elementele sînt: d ; o .

* Se scrie $A \cap B = \{d, o\}$.

O astfel de mulțime este numită „mulțime pereche”.

2° Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B . Elementele sînt: b .

* Se scrie $A - B = \{b\}$.

O astfel de mulțime este numită *mulțime cu un singur element*.

3° Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A . Elementele sînt: t ; u ; p .

* Se scrie $B - A = \{t, u, p\}$.

4° Reuniunea dintre mulțimea A și mulțimea B . Elementele sînt: b ; d ; o ; t ; u ; p .

* Se scrie $A \cup B = \{b, d, o, t, u, p\}$.

5° Reuniunea dintre mulțimea B și mulțimea A . Elementele sînt: b ; d ; o ; t ; u ; p .

* Se scrie: $B \cup A = \{b, d, o, t, u, p\}$.

Se observă că schimbînd ordinea în care luăm mulțimile, reuniunea lor nu se schimbă. De aceea zicem că *reuniunea mulțimilor este comutativă*.

* Se scrie: $A \cup B = B \cup A$.

Elevii sînt solicitați să verifice dacă diferența și intersecția mulțimilor A și B sînt comutative.

Privind figura 12, se constată că diferența dintre A și B nu este aceeași cu diferența dintre B și A (elevii vor repeta elementele din care este formată fiecare). Se va conchide că *diferența mulțimilor nu este comutativă*.

* Se scrie: $A - B \neq B - A$.

Se va constata că intersecția dintre mulțimile A și B are aceleași elemente ca și intersecția dintre mulțimile B și A , adică *intersecția mulțimilor este comutativă* (elevii vor spune elementele fiecăreia).

* Se scrie: $A \cap B = B \cap A$.

b) Învățătorul execută pe tablă figura 14, punînd aceleași întrebări ca și la figura 12. Se găsesc:

1° Intersecția mulțimii C cu mulțimea D nu are nici un element.

* Se scrie: $C \cap D = \{ \}$ sau $C \cap D = \emptyset$.

Mulțimea fără nici un element este numită *mulțime vidă*.

2° Intersecția mulțimii D cu mulțimea C nu are nici un element.

* Se scrie: $D \cap C = \{ \}$ sau $D \cap C = \emptyset$.

3° Diferența dintre mulțimea C și mulțimea D are ca elemente: a ; b .

* Se scrie: $C - D = \{a, b\} = C$.

4° Diferența dintre mulțimea D și mulțimea C are ca elemente: o ; p ; t .

* Se scrie: $D - C = \{o, p, t\} = D$.

5° Reuniunea dintre mulțimea C și mulțimea D are ca elemente: a ; b ; o ; p ; t .

* Se scrie: $C \cup D = \{a, b, o, p, t\}$.

6° Reuniunea dintre mulțimea D și mulțimea C are ca elemente: a ; b ; o ; p ; t .

* Se scrie: $D \cup C = \{a, b, o, p, t\}$.

Se va observa comutativitatea intersecției și reuniunii, și necomutativitatea diferenței.

* $C \cap D = D \cap C = \emptyset$; $C \cup D = D \cup C$; $C - D \neq D - C$.

Muncă independentă.

Aceeași ca cea prevăzută la tema a 2-a pentru „Mulțime inclusă într-o mulțime”. Apoi, învățătorul va cere elevilor să ridice de pe diagrama realizată pe bănci, pe rînd (așezînd piesele înapoi de unde au fost luate, înainte de a cere ridicarea pieselor ce formează mulțimea următoare), piesele ce alcătuiesc mulțimile cerute a fi arătate și în legătură cu figurile 12 și 14 în exemplele a și b mai sus. Elevii vor arăta:

1° Pentru intersecția dintre A și R , toate triunghiurile roșii, adică tocmai mulțimea R .

2° Pentru diferența dintre A și R , toate triunghiurile care nu sînt roșii.

3° Pentru diferența dintre R și A , nu vor ridica nici o piesă. Ea este mulțime vidă, deoarece nu există nici un triunghi roșu care să nu fie în același timp triunghi.

4° Pentru reuniunea dintre A și R , toate triunghiurile, adică tocmai mulțimea A .

După fiecare etapă discutată cu elevii, învățătorul execută aceeași sarcină folosind tabla magnetică, pentru a da posibilitate elevilor să se corecteze.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschid cărțile la tema a 3-a: „Mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date”.

Elevii privesc prima figură. Îndrumați de învățător, vor preciza din cine este formată mulțimea A , apoi mulțimea B (cum s-a arătat la tema a 2-a).

Vor spune apoi din ce este formată intersecția mulțimii A cu mulțimea B : toate mingile care sînt și mici, și roșii. Se vor arăta pe figură (sînt cele din zona hașurată).

La fel se va proceda, pe rînd, cu toate celelalte figuri existente la această temă.

Figura a doua arată că intersecția mulțimii B cu mulțimea A este formată din toate mingile care sînt și mici, și roșii (adică este egală cu cea anterioară, verificîndu-se comutativitatea).

Figura a treia arată că diferența dintre mulțimea A și mulțimea B este formată din toate mingile mici, care nu sînt roșii (deci din toate mingile albastre).

Figura a patra arată că diferența dintre mulțimea B și mulțimea A este formată din toate mingile roșii, care nu sînt și mici (deci din toate mingile roșii și mari).

Se va sublinia neocomutativitatea diferenței mulțimilor.

A cincea și a șasea figură arată că reuniunea mulțimilor A și B este formată din toate mingile care, sînt fie mici, fie roșii.

Se subliniază comutativitatea reuniunii mulțimilor.

Se privește figura de la tema a 4-a, constatîndu-se că mulțimea C este formată din toate mingile albastre. Se vede că nu există mingi care să fie în același timp și albastre, și roșii, adică C și B au elemente comune. Intersecția dintre C și B este, așadar, mulțime vidă.

Se vor propune ca temă acasă problemele: 1; 2; 6; 7. Rezolvarea lor se va discuta amănunțit în ora următoare.

În clasă se vor rezolva problemele: 3; 4; 5.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la temele 3—4

Problema 2.

Observăm că mulțimea F este inclusă în mulțimea E .

a) Intersecția lui E cu F va conține toate elementele mulțimii F : Doru; Anca; Costel. b) Diferența dintre E și F are elementele: Florin; Elena. c) Diferența dintre F și E este mulțimea vidă, neexistînd nici un element care să aparțină lui F și să nu aparțină lui E . d) Reuniunea lui F cu E are elementele: Florin; Doru; Anca; Costel; Elena. Se vede că reuniunea este egală cu mulțimea E .

Problema 3.

a) Figura 22. Mulțimea triunghiurilor. b) Figura 23. Mulțimea figurilor albastre. c) Figura 24. Mulțimea triunghiurilor albastre. d) Figura 25. Mulțimea triunghiurilor care nu sînt albastre. e) Figura 26. Mulțimea figurilor albastre, care nu sînt triunghiuri. f) Figura 27. Mulțimea figurilor care sînt fie triunghiuri, fie albastre.

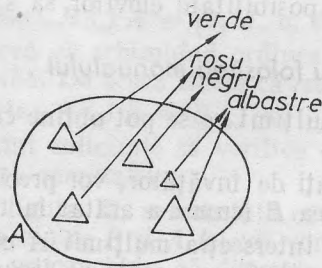


Fig. 22

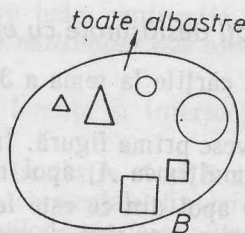


Fig. 23

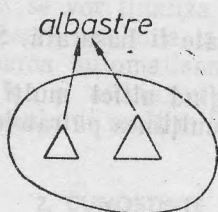


Fig. 24

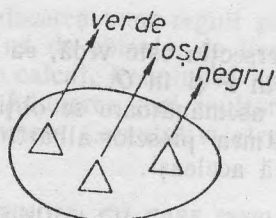


Fig. 25

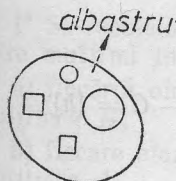


Fig. 26

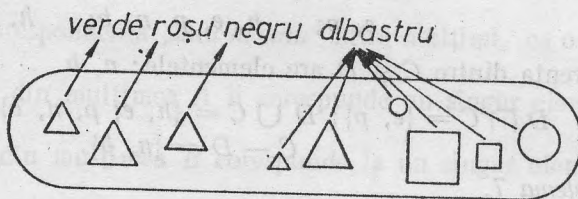
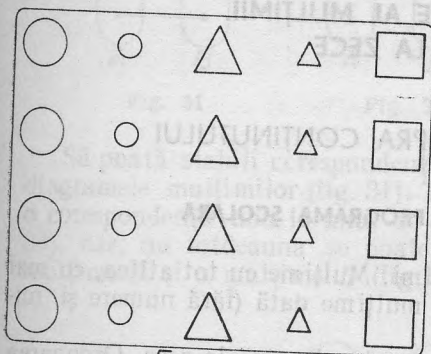


Fig. 27

Problema 4.

Figurile 28 și 29. Se vor arăta toate figurile existente în zona hașurată, indiferent în ce mod ar fi hașurarea.



E

Fig. 28

Notă pentru figurile: 28, 29, 30
culorile sînt:

Rîndul 1 — negru
Rîndul al 2-lea — verde
Rîndul al 3-lea — roșu
Rîndul al 4-lea — albastru

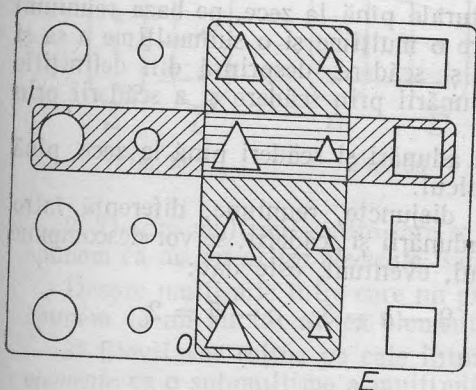


Fig. 29

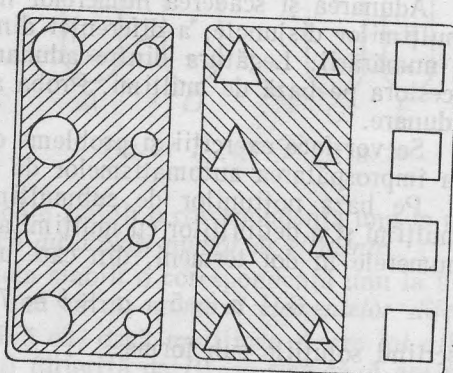


Fig. 30

Problema 5.

Figura 30. Intersecția este vidă, ea nu poate fi hașurată. Se arată toate figurile existente în F și în O .

Alte probleme asemănătoare se obțin alegînd altfel mulțimile I și O . Exemplu: I , mulțimea pieselor albastre; O , mulțimea pătratelor. Etc. Întrebările se păstrează aceleași.

Problema 6.

Intersecția, reuniunea și diferența dintre D și C au, respectiv, elementele:

$$e, p; \quad h, e, p, n, b; \quad h.$$

Diferența dintre C și D are elementele: n, b .

$$\begin{aligned} * \quad D \cap C &= \{e, p\}; \quad D \cup C = \{h, e, p, n, b\}; \quad D - C = \{h\}; \\ C - D &= \{n, b\}. \end{aligned}$$

Problema 7.

Mulțimea vidă, neexistînd elevi de 3 ani.

Capitolul 2

**NUMĂRUL DE ELEMENTE AL MULȚIMIILOR
NUMERELE PÎNĂ LA ZECE**

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMUL ȘCOLAR

Correspondența „unu la unu” între mulțimi. Mulțime cu tot atîtea, cu mai multe sau cu mai puține elemente decît o mulțime dată (fără numere și numărare).

Formarea, numirea și scrierea numerelor naturale pînă la zece. Ordonarea lor. Numărarea. Separarea dintr-o mulțime a unor submulțimi disjuncte între ele.

Adunarea și scăderea numerelor naturale pînă la zece, pe baza reuniunii mulțimilor disjuncte, a diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa și a numărării. Legătura dintre adunare și scădere, desprinsă din definițiile acestora pe bază de mulțimi. Proba adunării prin scădere și a scăderii prin adunare.

Se vor face exerciții și probleme cu adunări și scăderi pînă la zece, pînă la înprospătarea automatismelor de calcul.

Pe baza noțiunilor de submulțimi disjuncte, reuniune, diferență între mulțimi și a definițiilor cu mulțimi a adunării și scăderii, se vor descompune numerele în doi termeni, din care unul, eventual, este dat:

$$3 + a = 5; \quad a + b = 7; \quad 9 - a = 3; \quad a - 5 = 2$$

scriind soluțiile sub forma:

$$a = 5 - 3 \quad a = 7 - b; \quad a = 9 - 3; \quad a = 2 + 5 \text{ etc.}$$

Exercițiile se vor finaliza cu deducerea unor reguli practice, care până mai facă necesară apelarea la mulțimi de obiecte, de fiecare dată, ajutându-se la formarea automatismelor de calcul. Reuniunea mai multor mulțimi. Comutativitatea și asociativitatea. Adunarea mai multor numere naturale, cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte. Comutativitatea și asociativitatea.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÂNĂ ELEVII

1° Să recunoască corespondența „unu la unu” între mulțimi, ca o legătură între mulțimi în care:

a) fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un singur element din mulțimea B ;

b) fiecare element din mulțimea B corespunde la un singur element din mulțimea A .

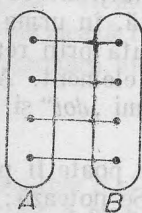


Fig. 31

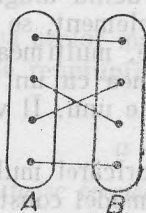


Fig. 32

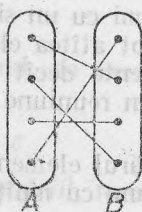


Fig. 33

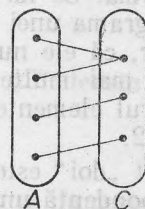


Fig. 34

Să poată stabili corespondențe element cu element între mulțimi, folosind diagramele mulțimilor (fig. 31). Trebuie să se observe că, dacă s-a putut stabili o corespondență unu la unu, de obicei se mai pot stabili și altele (fig. 32 și 33), dar, nu totdeauna se poate stabili o corespondență unu la unu între o mulțime A și o mulțime B (fig. 34, 35, 36, 37 și 38).

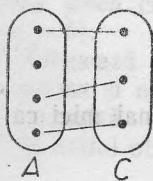


Fig. 35

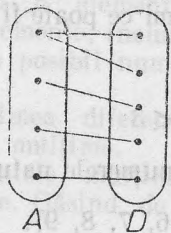


Fig. 36

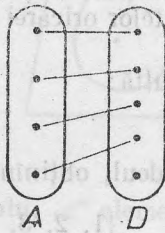


Fig. 37

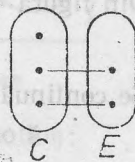


Fig. 38

2° Despre mulțimile între care se poate stabili o corespondență unu la unu spunem că *au tot atâtea elemente*, sau că *au același număr de elemente*.

Despre mulțimile între care nu putem stabili o corespondență unu la unu, spunem că nu au tot atâtea elemente sau că *au numărul elementelor diferit*.

3° Elevii vor reține pe cale intuitivă că, dacă mulțimea A are *tot atâtea elemente* ca o submulțime a mulțimii B (diferită de B), se zice că A are *mai puține elemente* decât B , sau că B are *mai multe elemente* decât A (fig. 39).

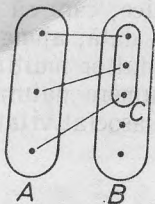


Fig. 39

Ei vor mai spune în această situație că numărul elementelor lui A este mai mic decât numărul elementelor lui B, sau că numărul elementelor lui B este mai mare decât numărul elementelor lui A.

A spune dacă mulțimea A are tot atâtea, mai multe sau mai puține elemente decât mulțimea B, înseamnă a compara mulțimile A și B după numărul elementelor.

4° Mulțimile cu un singur element sînt recunoscute intuitiv de către elevi, datorită experienței de viață pe care o au pînă la vîrsta școlarizării. Folosind mulțimi cu un singur element și reuniunea mulțimilor disjuncte, elevii vor cunoaște construirea numerelor naturale în maniera următoare:

Se ia o mulțime model cu un singur element. Numărul elementelor sale este numit „unu” și notat 1. Tot unu este numit numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu ea.

Se ia o mulțime cu 1 element, și încă o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Se formează reuniunea lor. Făcînd diagrama mulțimii obținute, și diagrama unei mulțimi cu un singur element, se constată, în urma încercărilor, că ele nu au tot atâtea elemente, mulțimea obținută prin reuniune avînd mai multe elemente decât mulțimea cu un singur element. Așadar, numărul elementelor din reuniune nu este unu. Îl vom numi „doi” și îl vom nota 2.

Tot „doi” este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu mulțimea model construită. Se notează:

$$1 < 2 \text{ (citind: „1 este mai mic decît 2”)}$$

sau

$$2 > 1 \text{ (citind: „2 este mai mare decît 1”)}$$

Reunind o mulțime cu 2 elemente, cu o mulțime cu 1 element disjunctă de prima, se obține o mulțime model care nu are nici 1, nici 2 elemente (lucru pe care elevii îl vor verifica folosind diagramele, ca în fig. 40—41). Numărul elementelor mulțimii obținute va fi numit „trei” și notat 3. Tot trei va fi numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu ea.

Din figura 42 rezultă:

$$1 < 2 < 3$$

Se continuă procedeul, obținîndu-se numerele naturale mai mici ca zece:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Numărul zero, notat 0, va exprima numărul elementelor mulțimii vide.

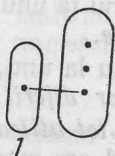


Fig. 40

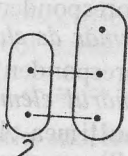


Fig. 41

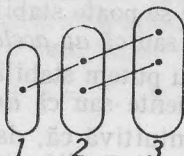


Fig. 42

Mulțimea numerelor naturale pînă la zece, scrise în ordine crescătoare, este:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Păstrînd această ordine a elementelor, ea se va numi șirul numerelor naturale pînă la zece.

5° Numărul zece se obține și se numește la fel cu numerele naturale pînă la 9. Pentru scrierea lui însă nu se acordă o nouă cifră (semn cu care scriem numerele de la 0 la 9). Tehnica scrierii lui zece este aceea folosită pentru numerele mai mari ca zece, de care ne vom ocupa într-un alt capitol.

6° Numărarea va fi cunoscută ca formă de punere în corespondență unu la unu a mulțimii „de numărat”, cu o submulțime a mulțimii numerelor naturale, începînd cu 1 și urmînd în ordinea din șirul numerelor naturale. Ultimul număr din acest șir intrat în corespondență respectivă este rezultatul numărării.

7° Elevii vor face exerciții de separare dintr-o mulțime cu numărul elementelor cunoscut, a două sau mai multe submulțimi disjuncte din care una să aibă, eventual, numărul elementelor de asemenea cunoscut, fără ca din mulțimea inițială să rămînă elemente necuprinse în aceste submulțimi.

Exercițiile de acest fel fac o pregătire valoroasă pentru studiul ulterior al scăderii și împărțirii.

8° Adunarea a două numere naturale a și b se va face după regula:

Se iau două mulțimi disjuncte oarecare, una avînd „ a ” elemente și una avînd „ b ” elemente.

Se formează reuniunea acelor mulțimi.

Se numără elementele reuniunii. Găsim, de exemplu, „ c ” elemente, notăm:

$$a + b = c$$

Numerele a și b se numesc termenii adunării¹, numărul c se numește suma numerelor a și b .

Este comod a se folosi ca mulțimi model pentru efectuarea adunării numerelor naturale, mulțimi de puncte.

De exemplu, pentru a aduna 2 cu 3, figura 43 arată că avem $2 + 3 = 5$. Observăm din aceeași figură că $3 + 2 = 5$. Așadar, adunarea numerelor naturale este comutativă.

9° Scăderea a două numere naturale a și b se face după regula:

Se ia o mulțime cu „ a ” elemente, și o mulțime cu „ b ” elemente, inclusă în prima (ceea ce este posibil numai dacă $a \geq b$).

Se formează mulțimea diferență dintre prima și a doua mulțime.

Se numără elementele mulțimii diferență astfel obținute. Găsim, de exemplu, „ c ” elemente, notăm:

$$a - b = c.$$

Numerele a și b se numesc termenii scăderii. Numărul a se numește descăzut, b se numește scăzător iar c se numește diferență sau rest.

Este comod a folosi ca mulțimi model pentru efectuarea scăderii numerelor naturale, mulțimi de puncte.

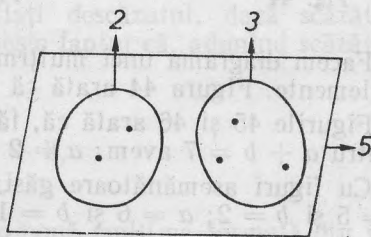


Fig. 43

¹ În general, dacă avem $a * b = c$ ($*$ fiind o operație oarecare), a și b se numesc termeni iar c rezultatul operației. În particular, dacă operația $*$ este numită înmulțire, a și b sînt numiți factori.

De exemplu, figura 43 arată că avem:

$$5 - 2 = 3 \quad \text{și} \quad 5 - 3 = 2$$

10° Se constată imediat că, dacă este adevărată una din egalitățile:

$$2 + 3 = 5; \quad 3 + 2 = 5; \quad 5 - 2 = 3; \quad 5 - 3 = 2$$

atunci sînt în mod sigur adevărate și celelalte trei.

În adevăr, toate cele patru egalități se deduc dintr-o singură figură, anume, din figura 43.

De aici rezultă modalitățile de a face probele prin adunare și scădere, a operațiilor de adunare și scădere.

11° Aceeași figură (43) arată că la scădere se curoaște suma a două numere naturale, și unul din numere, și se caută celălalt număr. De aceea se spune că *scăderea este operație inversă adunării*. Numărul căutat se află scăzînd din sumă numărul cunoscut.

Pe baza observației de la (10°) se vor găsi numerele necunoscute din egalității de felul:

$$3 + a = 5; \quad a + b = 7; \quad 9 - a = 3; \quad a - 5 = 2$$

fie folosind diagrame, fie calculînd direct, prin adunare sau scădere. Folosind diagrame:

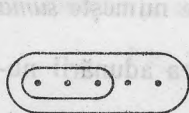


Fig. 44

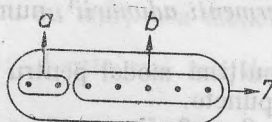


Fig. 45

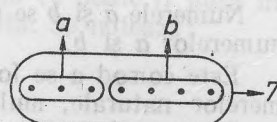


Fig. 46

Facem diagrama unei mulțimi cu 5 elemente; separăm o submulțime cu 3 elemente. Figura 44 arată că în $3 + a = 5$ avem $a = 2$.

Figurile 45 și 46 arată că, făcînd diagrama unei mulțimi cu 7 elemente, pentru $a + b = 7$ avem: $a = 2$ și $b = 5$ sau $a = 3$ și $b = 4$.

Cu figuri asemănătoare găsim încă: $a = 1$ și $b = 6$; $a = 4$ și $b = 3$; $a = 5$ și $b = 2$; $a = 6$ și $b = 1$; $a = 0$ și $b = 7$; $a = 7$ și $b = 0$.

Figura 47 arată că în $9 - a = 3$, făcînd diagrama unei mulțimi cu 9 elemente și separînd o submulțime cu 3 elemente, avem $a = 6$.

Figura 48 arată că în $a - 5 = 2$, luînd submulțimile disjuncte între ele una cu 5 și una cu 2 elemente, avem $a = 7$, adică numărul elementelor reuniunii celor două submulțimi.

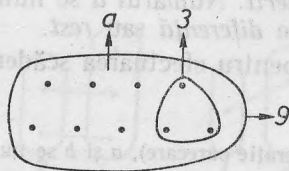


Fig. 47

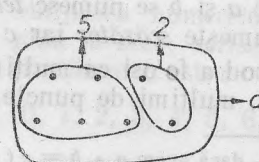


Fig. 48

Fără diagrame:

Egalitatea $3 + a = 5$ se citește: „suma a două numere este 5, unul din numere este 3. Aflați celălalt număr“. Rezolvarea acestei probleme se scrie, ținând seama de legătura dintre adunare și scădere (scăzînd din sumă unul din termeni, obținem celălalt termen):

$$\begin{aligned} 3 + a &= 5, \\ a &= 5 - 3, \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Egalitatea $a + b = 7$ se citește: „Găsiți două numere a căror sumă este 7“. Rezolvarea se scrie:

$$\begin{aligned} a + b &= 7, \\ a &= 7 - b. \end{aligned}$$

Înlocuind aici pe b cu unul din numerele:

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

se calculează de fiecare dată, a . Rezultatele se pot sintetiza într-o tabelă de

felul:

a	0	1	2	3	4	5	6	7
b	7	6	5	4	3	2	1	0

Egalitatea $9 - a = 3$ se citește: „Aflați scăzătorul, dacă descăzutul este 9 și diferența este 3“. Rezolvarea folosește faptul că, scăzînd din descăzut diferența obținem pe scăzător:

$$\begin{aligned} 9 - a &= 3, \\ a &= 9 - 3 \\ a &= 6. \end{aligned}$$

Egalitatea $a - 5 = 2$ se citește: „Aflați descăzutul, dacă scăzătorul este 5 și diferența este 2“. Rezolvarea folosește faptul că, adunînd scăzătorul cu diferența, obținem pe descăzut:

$$\begin{aligned} a - 5 &= 2, \\ a &= 5 + 2, \\ a &= 7. \end{aligned}$$

12° Reuniunea mai multor mulțimi este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile date.

Reuniunea mulțimilor A , B și C din figura 49 este formată din elementele p ; s ; d ; f ; t ; e ; m .

Se vede că schimbînd ordinea în care luăm mulțimile A , B și C , reuniunea lor rămîne formată din aceleași elemente. Așadar, reuniunea mai multor mulțimi este comutativă. (Asoc.)

13° Adunarea mai multor numere naturale a , b și c se face după regula:

Se iau trei mulțimi disjuncte două câte două, una avînd a elemente, una avînd b elemente și una avînd c elemente.

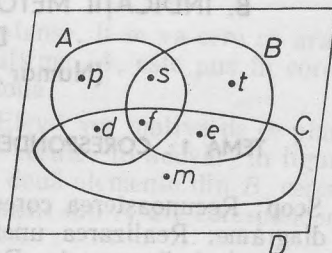


Fig. 49

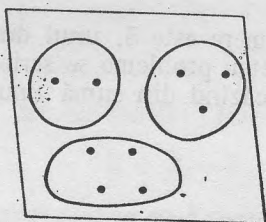


Fig. 50

Se formează reuniunea celor trei mulțimi.
Se numără elementele reuniunii. Găsind, de exemplu, d elemente, notăm:

$$a + b + c = d.$$

Pentru adunarea numerelor 2, 3 și 4, figura 50 arată că:

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Având în vedere comutativitatea reuniunii mulțimilor, rezultă că și adunarea mai multor numere naturale este comutativă:

$$2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 3 + 4 + 2 = \dots = 9.$$

14° Reuniunea mulțimilor A , B și C din figura 49 poate fi obținută și pe una din căile:

a) Se formează mai întâi reuniunea mulțimilor A și B (ea are ca elemente: $p; s; d; f; t; e$), apoi aceasta se reunește cu mulțimea C (obținând în final mulțimea cu elementele: $p; s; d; f; t; e; m$).

b) Se formează mai întâi reuniunea mulțimilor B și C (ea are elementele: $s; t; f; e; d; m$), apoi se reunește A cu reuniunea lui B și C (obținând în final mulțimea cu elementele: $p; s; d; f; t; e; m$).

Se vede că pe oricare din căile de mai sus facem reuniunea mulțimilor A , B și C , obținem același rezultat. De aceea zicem că *reuniunea mulțimilor este asociativă*.

15° Rezultă imediat asociativitatea adunării mai multor numere naturale:

$$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4).$$

Termeni și notații ce se vor folosi

Correspondență „unu la unu” sau „element cu element”; mulțime cu tot atâtea, cu mai multe, sau cu mai puține elemente decât o mulțime dată.

Număr de elemente al mulțimii. Numere egale, cu semnul $=$; număr mai mare decât un alt număr, cu semnul $>$; număr mai mic decât un alt număr, cu semnul $<$; $\geq$ mai mare sau egal (nu este mai mic); $\leq$ mai mic sau egal (nu este mai mare).

Denumirile numerelor de la zero la zece; scrierea numerelor de la zero la nouă. Numărare.

Adunare; termeni; sumă; scădere; diferență sau rest; descăzut; scăzător. Proba adunării și scăderii. Operație inversă.

Asociativitate.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL II

(Număr de ore, orientativ = 11)

TEMA 1: CORRESPONDENȚA ELEMENT CU ELEMENT ÎNTRE MULȚIMI

Scop: Recunoașterea corespondenței unu la unu între mulțimi, realizată pe diagrame. Realizarea unei corespondențe între mulțimi după o regulă dată, folosind diagramele. Realizarea unor corespondențe unu la unu între două mulțimi date.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile 51, 54, 56 și 58. Cretă colorată. (La nevoie pot fi înlocuite cu desene făcute la tablă, cu cretă colorată.)

Pentru elevi: Plic cu figurile geometrice decupate din carton (pătrate, dreptunghiuri, triunghiuri, cercuri, fiecare în patru exemplare, respectiv de culorile roșu, albastru, verde, negru). Două ovale din sîrmă. Patru bucăți de sîrmă dreaptă, de cîte circa 20 cm fiecare.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1° Învățătorul prezintă planșa¹ cu figura 51. Prin discuții cu elevii se stabilește care sînt elementele mulțimii *A*, apoi elementele mulțimii *B*.

Învățătorul trasează o linie cu creta colorată de la cercul roșu, la triunghiul roșu, așa cum se vede pe figura 52.

Cere apoi elevilor să traseze linii asemănătoare de la fiecare element al mulțimii *A*, la elementele mulțimii *B* care au aceeași culoare cu elementul respectiv din *A*.

Sub îndrumarea învățătorului elevii completează planșa așa cum arată figura 53.

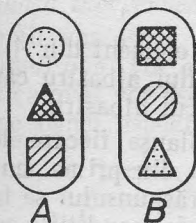


Fig. 51

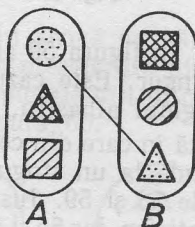


Fig. 52

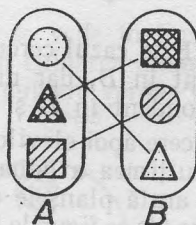


Fig. 53

Se prezintă planșa din figura 54 și se cere elevilor să unească prin linii fiecare element din mulțimea *A*, cu elementele mulțimii *C* care au aceeași culoare cu elementul respectiv din *A*.

Ajutați de învățător, elevii completează planșa cu figura 54, așa cum se vede în figura 55.

Învățătorul prezintă, pe rînd, planșe cu figurile 56 și 58, elevii completîndu-le așa cum arată figurile 57 și 59.

Cerînd elevilor să privească atît cele patru planșe, li se va cere să arate pe acelea în care, fiecare element din prima mulțime, *A*, este pus în corespondență cu un singur element din mulțimea a doua.

Se arată planșele conținînd figurile 53 și 57. Elevii vor motiva de ce planșele cu figurile 55 și 59 nu îndeplinesc condițiile cerute. În adevăr, în figura 55 triunghiul verde este pus în corespondență cu două elemente din *B*, cercul verde și pătratul verde. Mai mult, nu fiecare element din *A* are corespondent

¹ Figurile geometrice umplute aici cu puncte, pe planșa respectivă sînt roșii; cele simplu hașurate, pe planșă sînt albastre; cele dublu hașurate, pe planșă sînt verzi.

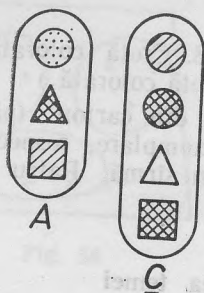


Fig. 54

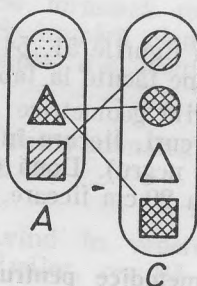


Fig. 55

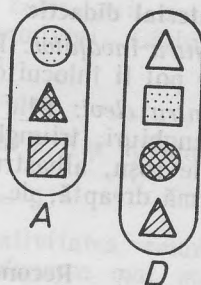


Fig. 56

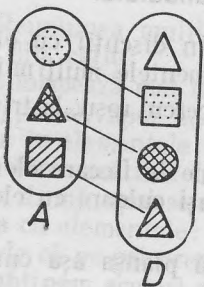


Fig. 57

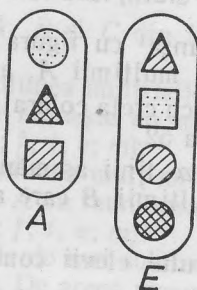


Fig. 58

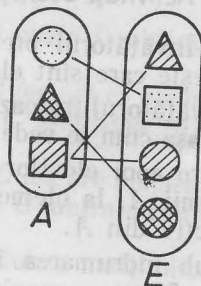


Fig. 59

în B. Este cazul cercului roșu. În figura 59 are fiecare element din A corespondent în B, dar nu unul singur. Este cazul pătratului albastru care are corespondent în B și pe triunghiul albastru, și pe cercul albastru.

Se cere apoi elevilor să spună în care din cele patru planșe, fiecare element din mulțimea a doua corespunde la un singur element din prima mulțime.

Se arată planșele cu figurile 53 și 59. Justificarea răspunsului se face ca mai sus (de ce figurile 53 și 59 satisfac, iar 55 și 57 nu satisfac condițiile cerute).

În fine, se cere elevilor să arate la care din cele patru planșe sînt îndeplinite amîndouă condițiile:

a) la fiecare element din prima mulțime corespunde un singur element din a doua mulțime;

b) fiecare element din a doua mulțime corespunde la un singur element din prima mulțime.

Se va arăta planșa cu figura 53.

Correspondența între mulțimi care îndeplinește aceste două condiții va fi numită *correspondență „unu la unu”* sau *correspondență „element cu element”* între mulțimi.

* Ea se numește și *correspondență biunivocă* între mulțimi.

Correspondența unu la unu se recunoaște pe diagrame prin aceea că, în nici una din cele două mulțimi nu rămîn elemente fără corespondent în cealaltă mulțime, și nici un element din cele două mulțimi nu are mai mult decît un corespondent în cealaltă mulțime.

2° Învățătorul execută pe tablă figura 60. El cere elevilor să pună în corespondență elemente din mulțimea M, cu elemente din mulțimea N, trăsînd linii cu cretă albă, astfel încît să rezulte o corespondență unu la unu între mulțimile M și N.

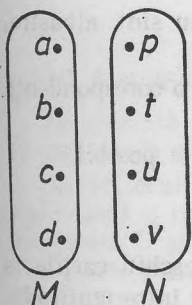


Fig. 60

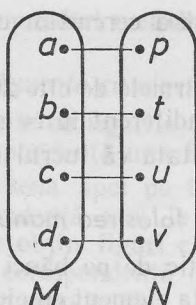


Fig. 61

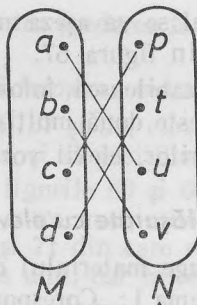


Fig. 62

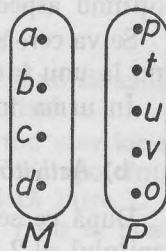


Fig. 63

Să zicem că elevii realizează corespondența unu la unu redată în figura 61.

Se va cere executarea din nou a figurii 60 și stabilirea unei corespondențe unu la unu între mulțimile M și N , care să difere de cea anterioară. Ajutați de învățător, ei vor stabili, folosind linii roșii, corespondențe ca cea din figura 62 de exemplu, apoi vor repeta exercițiul, stabilind alte corespondențe unu la unu între mulțimile M și N , diferite de cele de mai sus.

Se va trage concluzia că, dacă între două mulțimi se poate stabili o corespondență element cu element, atunci mai pot fi stabilite și altele.

3° Executând pe tablă figura 63 se va cere elevilor să realizeze o corespondență element cu element între mulțimile M și P . După câteva încercări, se va constata că acest lucru nu este posibil.

Muncă independentă

Copiii vor așeza ovalele din sîrmă pe bănci, cum se vede în figura 64. În primul oval vor așeza toate piesele din plic care au culoarea albastră, în al doilea oval vor așeza toate piesele din plic care au culoarea verde. Vor obține pe bănci aspectul din figura 65.

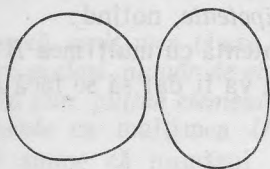


Fig. 64

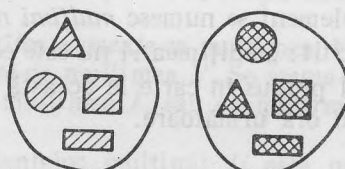


Fig. 65

Se va cere apoi să realizeze o corespondență între cele două mulțimi, așezînd cîte o sîrmă de 20 cm între elementele din cele două mulțimi, care sînt piese cu aceeași formă.

Se vor obține aspecte ca în figura 66.

Prin discuții cu elevii se va stabili că s-a realizat o corespondență unu la unu între cele două mulțimi.

Reintroducînd piesele în pliuri, se va așeza apoi în primul oval mulțimea pieselor albastre,

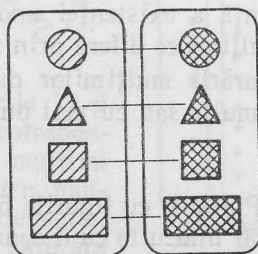


Fig. 66

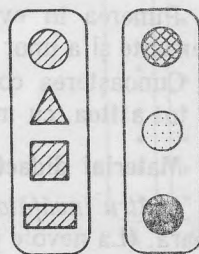


Fig. 67

iar în al doilea oval se va așeza mulțimea cercurilor care nu sînt albastre, obținînd aspectul din figura 67.

Se va cere să se stabilească, folosind sîrmele de cîte 20 cm, o corespondență unu la unu între aceste două mulțimi, indiferent în ce mod.

În urma încercărilor, elevii vor constata că lucrul nu este posibil.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

După ce se strînge materialul didactic de pe bănci se deschid cărțile la capitoul al 2-lea, tema 1: „Correspondența element cu element între mulțimi”.

Elevii urmăresc în cărți, iar învățătorul citește prima întrebare. Apoi, cere cîtorva elevi să răspundă la întrebarea pusă în carte. Dintre răspunsurile date se apreciază ca juste acele care indică figurile (1) și (2) din manual, ca redînd corespondențe element cu element între mulțimile A și B .

Elevii vor motiva de ce în figura (3) nu avem o corespondență element cu element între A și B : pătratul roșu din mulțimea E are corespondent și cercul roșu, și triunghiul roșu din mulțimea I . În figura (4) nu avem o corespondență element cu element între mulțimile B și O , deoarece, spre exemplu, pătratul roșu din mulțimea B nu are nici un corespondent în mulțimea O .

În figurile (1) și (2) fiecare element din prima mulțime are un singur corespondent în mulțimea a doua, și fiecare element din mulțimea a doua corespunde la un singur element din prima mulțime. Așadar, în figurile (1) și (2) din manual avem corespondențe element cu element între mulțimile A și B .

* Două mulțimi A și B între care se poate stabili o corespondență element cu element se numesc *mulțimi echipotente*, notînd:

$A \sim B$ (citit „mulțimea A este echipotentă cu mulțimea B ”).

* Două mulțimi A și B între care nu se poate stabili o corespondență element cu element se numesc *mulțimi neechipotente*, notînd:

$A \not\sim B$ (citit: „mulțimea A nu este echipotentă cu mulțimea B ”).

Exercițiul propus în carte la această temă va fi dat să se facă acasă și se va discuta în ora următoare.

TEMA A 2-A : NUMĂRUL DE ELEMENTE AL MULȚIMIILOR. COMPARAREA MULȚIMILOR DUPĂ NUMĂRUL DE ELEMENTE

Scop: Sesizarea existenței la orice mulțime a unui anumit număr de elemente.

Punerea în evidență a existenței unor mulțimi ce au același număr de elemente și a unor mulțimi ce diferă prin numărul de elemente.

Cunoașterea comparării mulțimilor după numărul de elemente: mulțime cu tot atîtea, cu mai multe sau cu mai puține elemente decît o mulțime dată.

Material didactic

Pentru învățător: Planșele cu figurile 53, 55, 57 și 59 folosite în ora anterioară. (La nevoie pot fi înlocuite cu desene făcute la tablă cu cretă colorată.)

Pentru elevi: Fișe cu figurile 72 și 73.

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se prezintă planșele cu figurile 53, 55, 57 și 59, elevii trebuind să spună în care avem o corespondență unu la unu, și să justifice răspunsul.

Învățătorul va desena apoi pe tablă figurile 68 și 69, cerind elevilor să stabilească o corespondență unu la unu între mulțimile U și V , apoi între mulțimile U și I . Se obțin figuri ca 70 și 71 din care rezultă că între U și V se poate stabili o corespondență unu la unu, dar între U și I nu se poate stabili o astfel de corespondență.

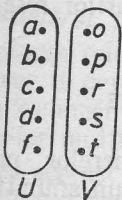


Fig. 68

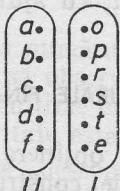


Fig. 69

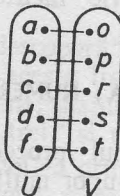


Fig. 70

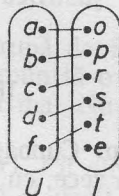


Fig. 71

Discuțiile cu elevii vor fi astfel conduse încât să se sublinieze că, între unele mulțimi se poate stabili o corespondență element cu element, între altele nu se poate stabili o astfel de corespondență.

Dacă între mulțimi se poate stabili o corespondență unu la unu, zicem că ele au același număr de elemente. Dacă între mulțimi nu poate fi stabilită o corespondență unu la unu, zicem că ele au numărul elementelor diferit.

Care dintre mulțimile V și I are același număr de elemente ca mulțimea U ? Elevii vor indica mulțimea V , precizând că numărul elementelor mulțimii I diferă de numărul elementelor mulțimii U , după cum rezultă din figura 71.

Se spune că mulțimea U are *tot atâtea elemente* ca mulțimea V , sau că mulțimea U are *același număr de elemente* ca mulțimea V . Se spune însă că mulțimea U are *mai puține elemente* ca mulțimea I , sau că mulțimea I are *mai multe elemente* ca mulțimea U .

Se mai spune că numărul elementelor mulțimii U este mai mic decât numărul elementelor mulțimii I , sau că numărul elementelor mulțimii I este mai mare decât numărul elementelor mulțimii U .

* Prin $\bar{A}$ înțelegem numărul elementelor mulțimii A .

* Avem: $\bar{U} = \bar{V}$; $\bar{U} < \bar{I}$; $\bar{I} > \bar{U}$.

Muncă independentă

Se distribuie fișe conținând figurile 72 și 73. Elevii sînt solicitați a stabili corespondențe unu la unu și să spună care mulțimi au același număr de elemente. Pentru mulțimile care diferă prin numărul de elemente, ei vor spune care are mai multe și care are mai puține elemente.

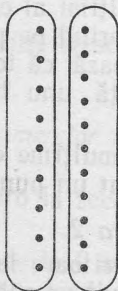


Fig. 72

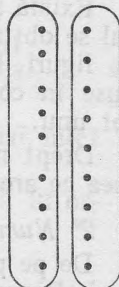


Fig. 73

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschide manualul, învățătorul citind exercițiul care a fost dat pentru acasă. Cîțiva elevi vor spune ce au constatat la rezolvarea lui. Răspunsul corect este că la figura (5) din manual se poate stabili o corespondență element cu element, dar la figura (6) o astfel de corespondență nu poate fi stabilită.

Discutînd cu elevii, aceștia vor preciza că la figura (6) din manual cele două mulțimi nu au același număr de elemente, prima mulțime avînd mai multe elemente decît mulțimea a doua.

Învățătorul va citi apoi tema a 2-a, elevii urmărind pe cărți cele citite. Ei vor justifica afirmațiile făcute în text, cu ajutorul figurilor respective.

TEMA A 3-A : NUMERELE NATURALE PÎNĂ LA ZECE

Scop: Cunoașterea unui procedeu de obținere a numerelor naturale pînă la zece, cu ajutorul unor mulțimi model construite într-un anumit mod. Formarea ideii de succesiune a numerelor naturale. Ordonarea numerelor naturale. Distincția între număr și cifră.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile din manual aflate la tema respectivă, una pentru numărul 1, una pentru 2 și una pentru 3. Pe fiecare planșă grupele de figuri vor fi acoperite cu hîrtie subțire lipită ușor în cele patru colțuri, astfel încît să poată fi descoperite la momentul potrivit.

Pentru elevi: Manualul.

Recomandări metodice pentru predarea temei

1° Numărul și cifra 1

Se cer de la elevi exemple de mulțimi cu un singur element. La exemplele date se adaugă cel reprezentat de prima figură aflată pe planșa referitoare la numărul 1, figură de pe care este ridicată foița de hîrtie care o acoperea.

Numărul elementelor acestei mulțimi este numit „unu” și notat cu 1. Se atrage atenția elevilor că semnele cu care se scriu numerele se numesc cifre. Cifra 1 nu este același lucru cu numărul pe care îl reprezintă.

Există și alte mulțimi al căror număr de elemente este tot unu? Răspunsul se obține descoperind pe planșa referitoare la numărul 1, al doilea grup de figuri. Ele sugerează că toate mulțimile cu un singur element pot fi puse în corespondență unu la unu între ele, deci au numărul elementelor tot unu.

Drept model de mulțime cu un singur element este comod a lua mulțimea ce are ca element un punct.

2° Numărul și cifra 2

De pe planșa referitoare la numărul 2 se „descoperă” prima grupă de figuri. Discuția cu elevii va sublinia că în aceste figuri sînt reunite o mulțime cu 1 element, cu o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Numărul elementelor mulțimii rezultate este numit „doi” și notat 2.

De pe aceeași planșă se „descoperă” al doilea grup de figuri. Cu ajutorul lor elevii vor stabili că numărul unu este mai mic decât numărul doi, notînd:

$1 < 2$ (citit: „1 este mai mic decît 2”).

Există și alte mulțimi al căror număr de elemente este tot doi? Răspunsul se obține descoperind pe planșa referitoare la numărul 2 al treilea grup de figuri. Ele sugerează că tot 2 este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu o mulțime cu 2 elemente.

Drept model de mulțime cu două elemente este comod a lua mulțimea ce are ca elemente două puncte.

3° Numărul și cifra 3

Pe planșa referitoare la numărul 3 se „descoperă” prima grupă de figuri. Elevii vor fi determinați să observe că în aceste figuri este reunită o mulțime cu 2 elemente cu o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Numărul elementelor mulțimii rezultate este numit „trei” și notat 3.

De pe aceeași planșă se „descoperă” al doilea grup de figuri. Cu ajutorul lor elevii vor stabili că numărul trei este mai mare decît doi și decît unu, notînd:

$$1 < 2 < 3.$$

„Descoperind” al treilea grup de figuri, se observă că tot 3 este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu o mulțime cu 3 elemente.

Drept model de mulțime cu trei elemente este comod a lua mulțimea ce are ca elemente trei puncte.

4° Celelalte numere pînă la zece

Se observă că prin același procedeu se obțin numerele:

$$4; 5; 6; 7; 8; 9.$$

Numărul zece se obține la fel cu numerele pînă la zece. Scrierea lui însă urmează alt procedeu, pentru numărul zece nu folosim o nouă cifră, așa cum am făcut pînă acum pentru fiecare număr mai mic decît zece. Scrierea lui zece o vom explica împreună cu scrierea numerelor mai mari ca zece.

Deoarece fiecare mulțime are un număr de elemente care primește un nume și o notație, vom proceda la fel și cu mulțimea vidă.

Numărul elementelor mulțimii vide îl numim „zero” și îl notăm 0. El este considerat cel mai mic număr natural.

Numerele naturale mai mici decît zece, în ordine crescătoare, sînt:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Scrise în această ordine, ele formează *șirul numerelor naturale* mai mici decît zece.

Se cere să se spună numerele naturale de la zero la zece, mai întîi în ordine crescătoare, apoi în ordine descrescătoare.

Se va scrie pe caiete *șirul numerelor naturale* de la 0 la 9.

Din manual se vor rezolva în clasă problemele: 1; 2; 5, întrebările (a) și (d); celelalte probleme de la sfîrșitul temei a 3-a se vor da pentru acasă, discutînd amănunțit rezolvările în lecțiile următoare.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 3-a.

Problema 1

Figurile 74, 75 și 76. Răspunsul se obține prin numărare.

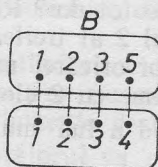


Fig. 74

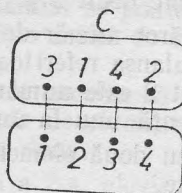


Fig. 75

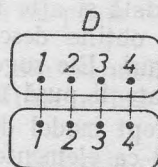


Fig. 76

Problema 3

1; 2; 3; 4; sau $\{1, 2, 3, 4\}$.

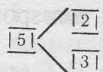
Problema 4

a, b, d, f, g sînt corecte. c, e, h nu sînt corecte și trebuie scrise:

$c) 7 > 6;$ $e) 9 > 8;$ $h) 4 < 6 < 9.$

Problema 5

a) Figura 77; dacă o submulțime are 2 elemente, cealaltă are 3 elemente.



b) Figura 78

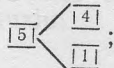


figura 79

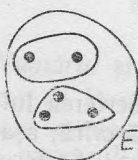
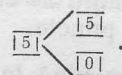


Fig. 77

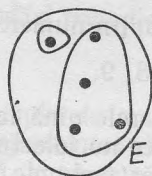


Fig. 78

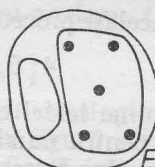


Fig. 79



Fig. 80

c) Același text, cu întrebarea (a), mulțimea E fiind însă cea din figura 80, iar tabloul se înlocuiește cu



Etc.

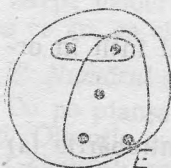


Fig. 81

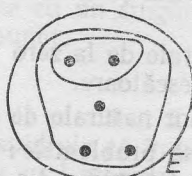


Fig. 82

d) Răspunsul la întrebarea (a) se modifică în acest caz, după cum se vede din figurile 81 și 82.



Explicația constă în aceea că submulțimile pot avea acum și

unul sau două elemente comune. Rămîne valabilă și situația în care submulțimile sînt disjuncte.

TEMA A 4-A : ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR PÎNĂ LA ZECE

Scop: Cunoașterea adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte; a scăderii acestor numere cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa; a legăturii dintre adunarea și scăderea numerelor naturale desprinsă din legătura ce există între două mulțimi disjuncte, reuniunea lor, și diferența dintre reuniune și fiecare din cele două mulțimi. Cunoașterea probelor adunării și scăderii numerelor naturale.

Material didactic

Pentru învățător: Cretă colorată.

Pentru elevi: Manualul.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1° Învățătorul execută pe tablă cu cretă colorată figura 83. El cere elevilor să închidă cu o linie verde elementele mulțimii formate prin reuniunea mulțimilor A și B , și să roteze cu C această reuniune. Se obține fi-gura 84.

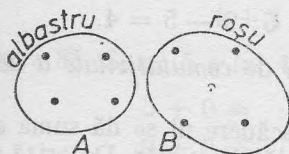


Fig. 83

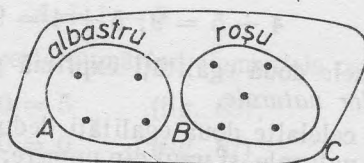


Fig. 84

*

$$C = A \cup B,$$

Se cere elevilor să arate pe figura 84 mulțimea diferență dintre C și A , apoi dintre C și B . Se arată, respectiv, mulțimile B și A .

*

$$C - A = B; \quad C - B = A.$$

2° Copiii vor fi solicitați să spună cîte elemente are mulțimea A , cîte elemente are mulțimea B și apoi cîte elemente are reuniunea mulțimilor A și B . Se va insista ca ei să explice cum au aflat fiecare din aceste trei numere: numărînd întîi elementele mulțimii A , apoi elementele mulțimii B și la urmă numărînd elementele mulțimii formată prin reuniunea mulțimilor A și B , adică numărînd elementele mulțimii C .

*

$$\overline{A} = 4; \quad \overline{B} = 5; \quad \overline{C} = 9 \text{ sau } \overline{A \cup B} = 9.$$

3° Din cele de mai sus rezultă că numărul 9 poate fi obținut dacă se dau numerele 4 și 5, prin procedeul următor, numit adunarea numerelor naturale:

Se ia o mulțime oarecare A cu 4 elemente și o mulțime oarecare B cu 5 elemente, disjunctă de prima (de exemplu mulțimile de puncte A și B de mai sus).

Se formează reuniunea dintre mulțimile A și B .

Prin numărare se găsește că reuniunea are 9 elemente.

Notăm: $4 + 5 = 9$

La solicitarea învățătorului elevii vor reaminti că numerele 4 și 5 care se adună se numesc termenii adunării, rezultatul adunării, 9, se numește suma dintre 4 și 5.

4^o Figura 84 poate folosi la efectuarea scăderii numerelor naturale 9 și 4:

Se ia o mulțime C avînd 9 elemente, și o submulțime A a mulțimii C , avînd 4 elemente.

Se formează mulțimea diferență dintre C și A , adică mulțimea B .

Prin numărare se găsește că diferența B are 5 elemente.

Notăm:

$$9 - 4 = 5.$$

Prin discuții se va reaminti că 9 se numește descăzut, 4 este scăzătorul iar 5 este diferența sau restul. Descăzutul și scăzătorul împreună formează termenii scăderii.

Din figura 84 se va deduce că avem și

$$9 - 5 = 4.$$

Rezumînd, se va atrage atenția elevilor că din figură 84 rezultă

$$4 + 5 = 9; 5 + 4 = 9; 9 - 4 = 5; 9 - 5 = 4.$$

Primele două egalități exprimă proprietatea de *comutativitate a adunării numerelor naturale*.

Din celelalte două egalități deducem că la scădere ni se dă suma a două numere naturale, și unul din numere, și se află celălalt număr. Datorită acestui fapt spunem că *scăderea este operația inversă adunării*.

Se atrage atenția elevilor că valabilitatea simultană a celor patru egalități dă posibilitatea să facem proba adunării prin adunare și prin scădere:

dacă $4 + 5 = 9$, atunci: $5 + 4 = 9$; $9 - 5 = 4$; $9 - 4 = 5$, și proba scăderii prin adunare și prin scădere:

dacă $9 - 4 = 5$, atunci: $5 + 4 = 9$; $4 + 5 = 9$; $9 - 5 = 4$.

Elevii vor reține enunțurile:

„Dacă din sumă scădem un termen al adunării, se obține celălalt termen“.

„Dacă adunăm diferența cu scăzătorul, obținem pe descăzut“.

„Dacă scădem din descăzut diferența, obținem pe scăzător“.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Elevii deschid cărțile la tema a 4-a: „Adunarea și scăderea numerelor pînă la zece“.

Sub îndrumarea învățătorului și folosind figura din manual ei vor explica aplicarea regulilor de adunare și scădere pentru a efectua:

$$2 + 3 = 5; 5 - 2 = 3; 5 - 3 = 2$$

Vor spune termenii adunării și suma; termenii scăderilor, scăzutul, scăzătorul, diferența sau restul.

Li se va cere să verifice pentru numerele 2 și 3 dacă adunarea este comutativă, folosind aceeași figură din manual. Se va pune problema dacă scăderea este comutativă, verificând pentru perechea de numere 5 și 2.

Se va constata că $5 - 2 = 3$ dar $2 - 5 =$ nu se poate efectua, neputând alege într-o mulțime cu 2 elemente, o submulțime cu 5 elemente. Se va deduce că scăderea nu este posibilă dacă scăzutul este mai mic decât scăzătorul. Dimpotrivă, adunarea este totdeauna posibilă.

Învățătorul va citi din manual, elevii urmărind textul, paragrafele (c) și (d) referitoare la probele adunării și scăderii și la adunarea și scăderea cu zero.

Se va atrage atenția asupra faptului că, dacă scăzutul este egal cu scăzătorul, diferența este 0.

Ca temă în clasă se vor efectua primele două coloane de adunări și scăderi de la exercițiile 1 și 2, restul dându-se de efectuat acasă. Aceste exerciții vor fi făcute folosind mulțimi model formate din puncte, reuniunea și diferența mulțimilor. Tot în clasă se vor rezolva exercițiile și problemele: 4; 5; 6; 7; 8; 9; 15; 17.

Pentru acasă se vor propune încă: 3; 10; 11; 12; 13; 14; 16, discutând amănunțit rezolvarea în lecțiile următoare.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 4-a

Exercițiul 1

$$4 + 1 = ; \quad 4 + 1 = 5$$

Figura 85. Suma 5 a lui 4 cu 1 se găsește numărând elementele reuniunii.

$$5 + 0 = ; \quad 5 + 0 = 5 \quad (\text{fig. 86});$$

$$0 + 0 = ; \quad 0 + 0 = 0 \quad (\text{fig. 87})$$

Etc.

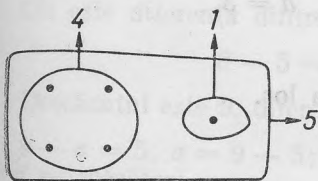


Fig. 85

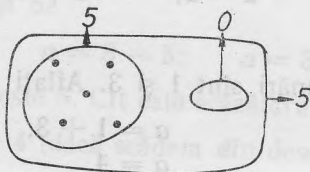


Fig. 86

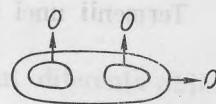


Fig. 87

Exercițiul 2

$6 - 4 = ;$ $6 - 4 = 2$ (fig. 88). Diferența 2, dintre 6 și 4, se găsește numărând elementele mulțimii C, diferența dintre mulțimile A și B.

$$5 - 5 = ; \quad 5 - 5 = 0 \quad (\text{fig. 89});$$

$$8 - 0 = ; \quad 8 - 0 = 8 \quad (\text{fig. 90}).$$

$1 - 3 =$ imposibil, neputând separa dintr-o mulțime cu 1 element o submulțime cu 3 elemente.

Etc.

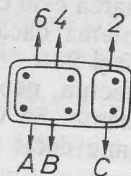


Fig. 88

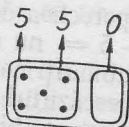


Fig. 89

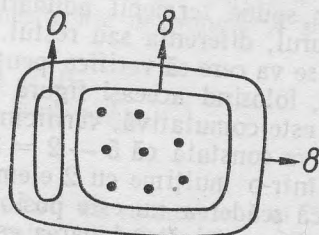


Fig. 90

Exercițiul 3

$$9 - 3 = 6. \quad \text{Proba: } 3 + 6 = 9 \quad \text{sau } 9 - 6 = 3.$$

$$3 + 6 = 9. \quad \text{Proba: } 6 + 3 = 9 \quad \text{sau } 9 - 6 = 3 \quad \text{sau } 9 - 3 = 6$$

Problema 4

a) $5 - a = 3$ din prima figură; $a - 2 = 3$ din a doua; $3 + a = 5$ din prima; $3 + 2 = a$ din a doua; $a + 2 = 5$ din a treia; $a - 3 = 2$ din a doua; $5 - 3 = a$ din prima; $5 - a = 2$ din a treia; $5 - 2 = a$ din a treia figură.

b) La toate egalitățile ce se deduc din prima figură, prin numărare găsim $a = 2$; la cele deduse din figura a doua, analog găsim $a = 5$; la cele ce se deduc din figura a treia găsim $a = 3$.

Pentru calculul lui a putem scrie, privind figurile din care se deduce fiecare egalitate:

$$\begin{aligned} 5 - a = 3, \quad a - 2 = 3, \quad 3 + a = 5, \quad 3 + 2 = a, \quad a + 2 = 5, \\ a = 5 - 3, \quad a = 2 + 3, \quad a = 5 - 3, \quad a = 3 + 2, \quad a = 5 - 2, \\ a = 2, \quad a = 5, \quad a = 2, \quad a = 5, \quad a = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - 3 = 2, \quad 5 - 3 = a, \quad 5 - a = 2, \quad 5 - 2 = a, \\ a = 3 + 2, \quad a = 5 - 3, \quad a = 5 - 2, \quad a = 5 - 2, \\ a = 5, \quad a = 2, \quad a = 3, \quad a = 3. \end{aligned}$$

Problema 5

Termenii unei adunări sînt 1 și 3. Aflați suma lor.

$$a = 1 + 3,$$

$$a = 4.$$

Suma a două numere este 4, unul din numere este 3. Aflați celălalt număr.

$$a + 3 = 4,$$

$$a = 4 - 3,$$

$$a = 1.$$

Suma a două numere este 4, unul din numere este 1. Aflați celălalt număr.

$$a + 1 = 4,$$

$$a = 4 - 1,$$

$$a = 3.$$

Se pot găsi și alte formulări pentru probleme. De exemplu, pentru prima figură:

Două mulțimi disjuncte au, respectiv, 1 și 3 elemente. Aflați câte elemente are reuniunea lor.

Din rezolvarea problemelor formulate în legătură cu a doua și a treia figură, rezultă:

Pentru a afla un termen al adunării când se dă suma și celălalt termen, scădem din sumă termenul cunoscut.

Putem afla pe a din

$$4 - a = 1 \text{ și } a - 1 = 3,$$

respectiv din a treia și prima figură. Găsim:

$$\begin{array}{ll} 4 - a = 1, & a - 1 = 3, \\ a = 4 - 1, & a = 1 + 3, \\ a = 3, & a = 4. \end{array}$$

Determinarea lui a din $4 - a = 1$ ne arată că:

Pentru a afla scăzătorul când cunoaștem descăzutul și diferența, scădem diferența din descăzut.

Determinarea lui a din $a - 1 = 3$ ne arată că:

Pentru a afla descăzutul când cunoaștem scăzătorul și diferența, adunăm scăzătorul cu diferența.

Problema 6

Avem, respectiv:

Aflați suma numerelor 2 și 7

$$2 + 7 = a; \quad a = 2 + 7; \quad a = 9.$$

Suma a două numere este 8, unul din numere este 3. Cît este celălalt număr?

$3 + a = 8$; $a = 8 - 3$; $a = 5$ (scădem din sumă numărul cunoscut).
Cît este diferența dintre 8 și 5?

$$8 - 5 = a; \quad a = 8 - 5; \quad a = 3.$$

Descăzutul este 9, diferența este 5. Cît este scăzătorul?

$9 - a = 5$; $a = 9 - 5$; $a = 4$ (dacă scădem din descăzut diferența obținem pe scăzător).

Diferența a două numere este 3, scăzătorul este 5. Să se afle descăzutul.

$a - 5 = 3$; $a = 5 + 3$; $a = 8$ (adunînd scăzătorul cu diferența obținem descăzutul).

Problema 7.

Se va observa mai întîi că nici a nici b nu pot fi mai mari decît 5. În al doilea rînd, dacă presupunem că unul din numere, să zicem b , este 3, celălalt număr, a , se calculează din $a + 3 = 5$. Avem:

$$a + 3 = 5; \quad a = 5 - 3; \quad a = 2$$

ceea ce arată că a nu poate fi orice număr natural mai mic decît 5.

Pentru a afla toate perechile de numere a și b pentru care:

$$a + b = 5$$

Vom considera că unul din numere (să zicem b) este, pe rînd, orice număr natural cel mult egal cu 5, și vom calcula ce număr natural poate fi a , în fiecare caz.

$$b = 0; a + 0 = 5; a = 5 - 0; a = 5 \text{ deci } a = 5; b = 0.$$

$$b = 1; a + 1 = 5; a = 5 - 1; a = 4 \text{ deci } a = 4; b = 1.$$

$$b = 2; a + 2 = 5; a = 5 - 2; a = 3 \text{ deci } a = 3; b = 2.$$

$$b = 3; a + 3 = 5; a = 5 - 3; a = 2 \text{ deci } a = 2; b = 3.$$

$$b = 4; a + 4 = 5; a = 5 - 4; a = 1 \text{ deci } a = 1; b = 4.$$

$$b = 5; a + 5 = 5; a = 5 - 5; a = 0 \text{ deci } a = 0; b = 5.$$

Mulțimea perechilor de numere naturale (a, b) care dau

$$a + b = 5$$

este, așadar:

$$\{(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)\}$$

Observăm că sînt 6 perechi de acest fel.

Notă: Problemele de la 8 la 16 se vor rezolva folosind diagrame, apoi folosind notarea numărului necunoscut cu o literă. În acest mod elevii vor înțelege mai bine legăturile existente între mărimile despre care vorbește problema, deducînd procedeul de rezolvare și nu „ghicind” ce operație trebuie făcută pentru a găsi răspunsul.

Problema 8

Figura 91. Prin numărare se găsește că mulțimea bilelor albastre are 9 elemente. Se observă că putem scrie:

$$a = 6 + 3; \quad a = 9.$$

Problema 9

Figura 92. Prin numărare se găsește că mulțimea peștilor prinși de Dana are 5 elemente. Se observă că putem scrie:

$$a + 3 = 8; \quad a = 8 - 3; \quad a = 5.$$

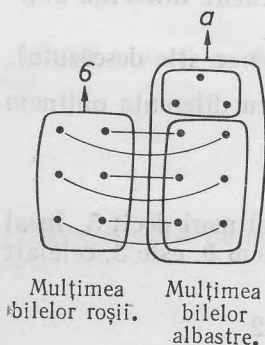


Fig. 91

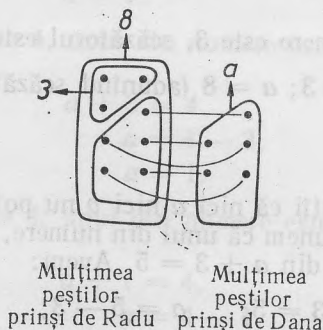


Fig. 92

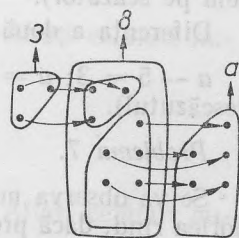


Fig. 93

Problema 10

Figura 93. $3 + a = 8$; $a = 8 - 3$; $a = 5$.

Problema 11

Figura 94. $a + 2 = 7$; $a = 7 - 2$; $a = 5$.

Problema 12

Figura 95. $a = 3 + 4$; $a = 7$.

Problema 13

Figura 96. $7 = 3 + a$; $a = 7 - 3$; $a = 4$.

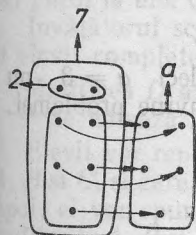


Fig. 94

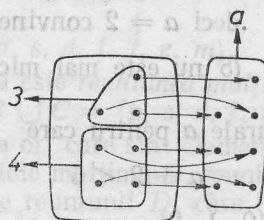


Fig. 95

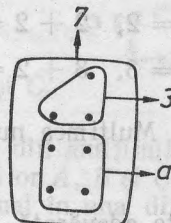


Fig. 96

Problema 14

Figura 95. $4 + 3 = a$; $a = 7$.

Figura 97. $4 - 3 = a$; $a = 1$.

Problema 15

Figura 98. $b = 3 + a$; $a = 3 + 2$; $b = 3 + 5$;

$a = 5$; $b = 8$.

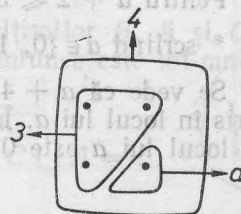


Fig. 97

Problema 16

Figura 99. $b = 5 + a$; $3 + a = 5$; $b = 5 + 2$;

$a = 5 - 3$; $b = 7$;

$a = 2$.

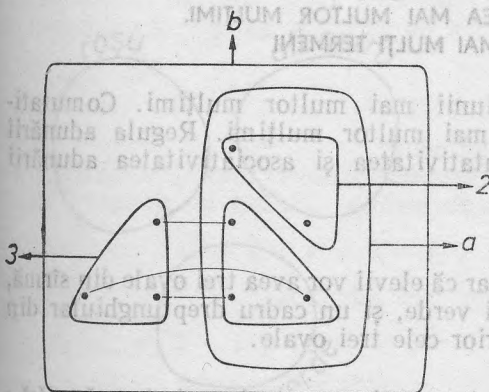


Fig. 98

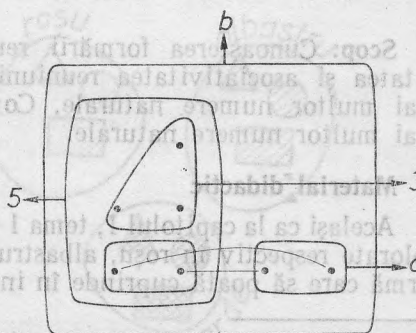


Fig. 99

Problema¹ 17

$\{0, 1, 2, 3\}$; $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

* sau: $a \in \{0, 1, 2, 3\}$; $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ultimele trei exerciții se rezolvă prin încercări, admitând ca evident faptul că dacă un termen al adunării crește, crește și suma:

$$a + 2 < 5,$$

$a = 0$, $0 + 2 = 2$, cum $2 < 5$ urmează că $a = 0$ face inegalitatea adevărată

$a = 1$, $1 + 2 = 3$, $3 < 5$ deci $a = 1$ convine problemei;

$a = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 < 5$ deci $a = 2$ convine problemei;

$a = 3$, $3 + 2 = 5$, $5 = 5$ (5 nu este mai mic decât 5) deci $a = 3$ nu convine problemei.

Mulțimea numerelor naturale a pentru care

$$a + 2 < 5$$

este adevărată, s-a găsit: $\{0, 1, 2\}$.

* Se scrie $a \in \{0, 1, 2\}$

Pentru $a + 2 \leq 5$ se găsește $\{0, 1, 2, 3\}$,

* scriind $a \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Se vede că $a + 4 < 2$ nu este adevărată pentru nici un număr natural scris în locul lui a . În adevăr, cel mai mic număr natural care poate fi scris în locul lui a este 0. Dar:

$$0 + 4 = 4 \text{ și } 4 < 2 \text{ este falsă.}$$

Vom zice că mulțimea numerelor naturale care scrise în locul lui a fac adevărată

$$a + 4 < 2$$

este vidă.

**TEMA A 5-A: REUNIUNEA MAI MULTOR MULȚIMI.
ADUNAREA CU MAI MULȚI TERMENI**

Scop: Cunoașterea formării reuniunii mai multor mulțimi. Comutativitatea și asociativitatea reuniunii mai multor mulțimi. Regula adunării mai multor numere naturale. Comutativitatea și asociativitatea adunării mai multor numere naturale.

Material didactic

Același ca la capitolul I, tema 1 doar că elevii vor avea trei ovale din sîrmă, colorate respectiv în roșu, albastru și verde, și un cadru dreptunghiular din sîrmă care să poată cuprinde în interior cele trei ovale.

¹ Toate exercițiile de acest tip întâlnite în manual se vor rezolva prin încercări, fără a se stabili reguli de felul celor folosite în algebră la rezolvarea inecuațiilor.