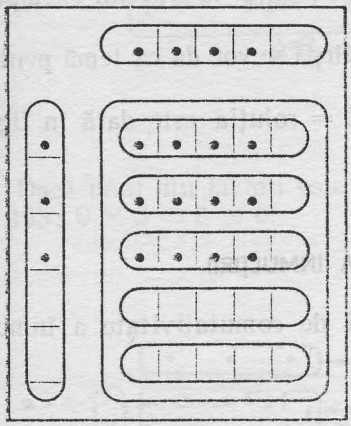


Fig. 187*

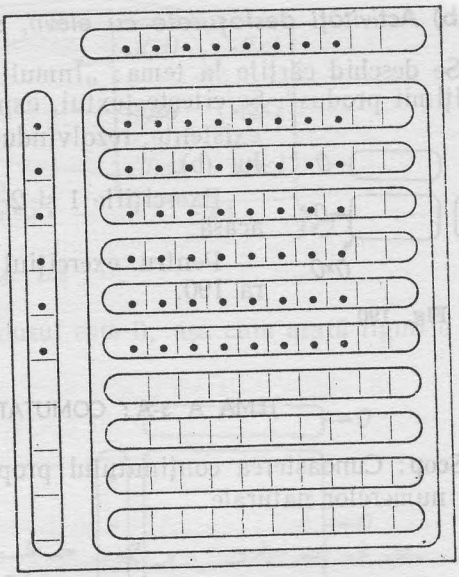


Fig. 187**

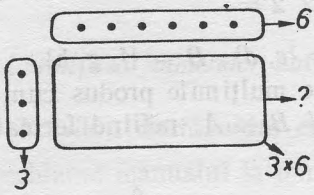


Fig. 188

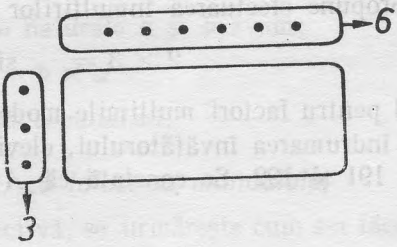


Fig. 189

A înmulți numerele naturale m și p înseamnă a găsi un număr natural notat $m \times p$ („m ori p“ sau „m înmulțit cu p“), astfel:

1° Se iau două mulțimi model oarecare A și B, A cu m elemente și B cu p elemente.

2° Se formează mulțimea produs $A \times B$.

3° Se numără elementele mulțimii produs. Rezultatul numărării este numărul $m \times p$.

Se atrage atenția că $\times$ este semnul înmulțirii. Uneori este folosit în locul lui un simplu punct $m \times p = m \cdot p$.

Numerele m și p se numesc factorii înmulțirii. Rezultatul se numește produs.

Se poartă discuții cu elevii legate de exemplele date, sau de alte exemple noi, pînă ce există certitudinea justei înțelegeri a celor de mai sus.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschid cărțile la tema: „Înmulțirea numerelor naturale, cu ajutorul mulțimii produs". Se citește textul, explicîndu-se ideile conținute și figurile existente, rezolvîndu-se exercițiile de la sfîrșitul exemplului (b).

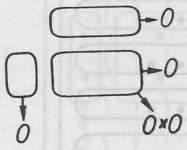


Fig. 190

Exercițiile 1 și 2 de la sfîrșit se vor da ca temă pentru acasă.

Pentru exercițiul $0 \times 0 =$ soluția este dată în figura 190.

TEMA A 3-A: COMUTATIVITATEA ÎNMULȚIRII

Scop: Cunoașterea conținutului proprietății de comutativitate a înmulțirii numerelor naturale.

Nici de acte este, ce să adune ne, NU este nevoie de ! exersarea comutativității

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se propune efectuarea înmulțirilor

$$2 \times 3 = \quad \text{și} \quad 3 \times 2 =$$

folosind pentru factori mulțimile model: $A = \{c, d\}$; $B = \{f, g, h\}$.

Sub îndrumarea învățătorului, elevii găsesc mulțimile produs cum arată figurile 191 și 192. Se constată că $A \times B \neq B \times A$, nefiind formate din

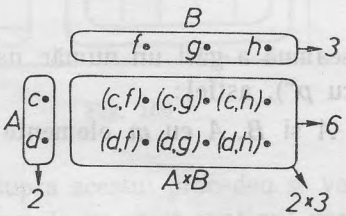


Fig. 191

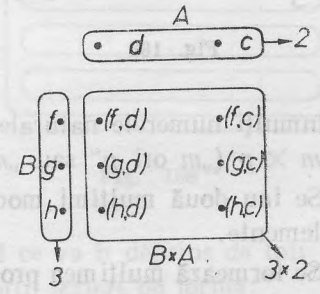


Fig. 192

aceleași elemente, deoarece, de exemplu $(c, f) \neq (f, c)$. În schimb mulțimile $A \times B$ și $B \times A$ au tot atîtea elemente, după cum se constată ușor, făcînd să corespundă un cuplu de forma (c, f) din $A \times B$, cu (f, c) din $B \times A$, așa cum arată figura 193 (care va fi executată de învățător).

Rezultă că avem $2 \times 3 = 3 \times 2$. Ceea ce s-a arătat despre numerele 2 și 3, se poate arăta despre oricare alte numere diferite de zero, pe aceeași cale.

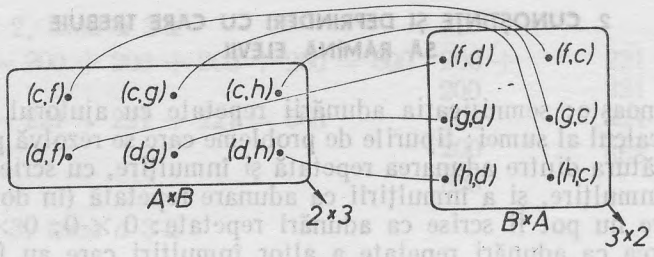


Fig. 193

Dacă unul din factori este 0, produsul este 0, așa cum arată figurile 194 și 195: $0 \times 3 = 3 \times 0$.

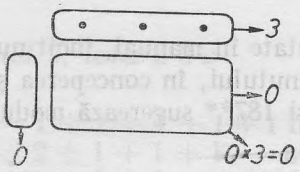


Fig. 194

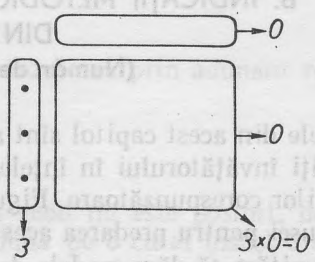


Fig. 195

Deducem că oricare ar fi numerele naturale a și b avem:

$$a \times b = b \times a$$

adică *înmulțirea numerelor naturale este comutativă.*

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Deschizînd manualul la tema respectivă, se urmărește cum s-a făcut judecata.

Primul exercițiu se face în clasă ca muncă independentă. Celelalte două se dau ca temă pentru acasă.

Capitolul 2

ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND ADUNAREA REPETATĂ

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Definirea înmulțirii numerelor naturale ca adunare repetată de termeni egali. Ilustrarea legăturii dintre această definiție și aceea care folosește mulțimea produs, prin scrierea convenabilă a mulțimii produs ca reuniune de submulțimi disjuncte, fiecare conținînd toate perechile ordonate la care primul element este același.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Se va cunoaște: semnificația adunării repetate cu ajutorul mulțimilor; procedee de calcul al sumei; tipurile de probleme care se rezolvă prin adunare repetată; legătura dintre adunarea repetată și înmulțire, cu scrierea adunării repetate ca înmulțire, și a înmulțirii ca adunare repetată (în două moduri); înmulțiri care nu pot fi scrise ca adunări repetate: 0×0; 0×1; 1×0; 1×1; scrierea ca adunări repetate a altor înmulțiri care au factor pe 0; tipuri de probleme care se rezolvă prin înmulțire, deduse din tipurile de probleme care se rezolvă prin adunare repetată.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 2

(Număr de ore, orientativ = 6)

Temele din acest capitol sînt astfel redactate în manual, încît nu pot crea dificultăți învățătorului în înțelegerea conținutului, în conceperea și realizarea lecțiilor corespunzătoare. Figurile 187* și 187** sugerează modul de folosire a trusei pentru predarea acestui capitol.

Ne limităm să dăm modele de rezolvare pentru:

Exercițiul 2, *tema* 1

a) $9 + 9 + 9 = 27$ etc.

$9 + 9 = 18$

$18 + 9 = 27$

b) $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ etc.

$8 + 8 = 16$

$16 + 8 = 24$

$24 + 8 = 32$

c) $11 + 11 + 11 = 33$ etc.

$11 + 11 = 22$

$22 + 11 = 33$

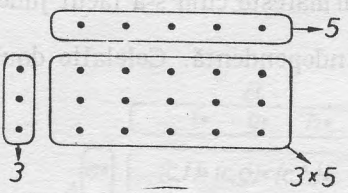


Fig. 196

Exercițiul 1, *tema a* 2-*a*

$14 + 14 + 14 + 14 = 4 \times 14$ etc.

Exercițiul 2, *tema a* 2-*a*

$5 + 5 + 5 = 3 \times 5$. Pentru găsirea numărului 3×5 folosim figura 196 care ne dă, prin numărare $3 \times 5 = 15$. La fel se face $7 + 7 + 7 + 7 =$

Exercițiul 1, *tema a* 3-*a* (sub titlul „Exerciții și probleme").

$7 \times 3 = 7 + 7 + 7$; $7 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ etc.

$= 14 + 7$ $= 6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

$= 21$ $= 9 + 3 + 3 + 3 + 3$

$= 12 + 3 + 3 + 3$

$= 15 + 3 + 3$

$= 18 + 3$

$= 21$

Exercițiul 2, *tema a* 3-*a*

$200 \times 4 = 200 + 200 + 200 + 200 = 800$

$3 \times 221 = 221 + 221 + 221 = 663$

etc.

$$\begin{array}{r} 200 + \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ \hline 800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 221 + \\ 221 \\ 221 \\ \hline 663 \end{array}$$

Exercițiul 3, *tema a* 3-*a*

$$\begin{aligned} 5 \times 3 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 6 + 3 + 3 + 3 \\ &= 9 + 3 + 3 \\ &= 12 + 3 \\ &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3 \times 5 &= 5 + 5 + 5 \\ &= 10 + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Exercițiul 4, *tema a* 3-*a*

$5 \times 3 = 15$. Se calculează cu mulțimea produs sau prin adunare repetată etc.

Exercițiul 9, *tema a* 3-*a*

a) $\begin{aligned} 5 \times 1 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$

În al doilea mod nu este posibil, deoarece nu putem aduna pe 5 cu el însuși o singură dată (adunarea presupune minimum 2 termeni).

$1 \times 1 = \ ; 0 \times 0 = \ ; 1 \times 0 =$ nu se poate calcula prin adunare repetată.

$6 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. În al doilea mod nu este posibil.

b) $5 \times 1 = 5$ (fig. 197); $1 \times 1 = 1$ (fig. 198); $0 \times 0 = 0$ (fig. 190) etc.

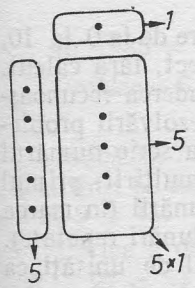


Fig. 197

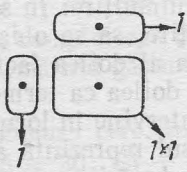


Fig. 198

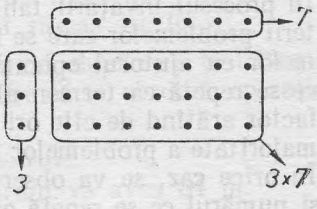


Fig. 199

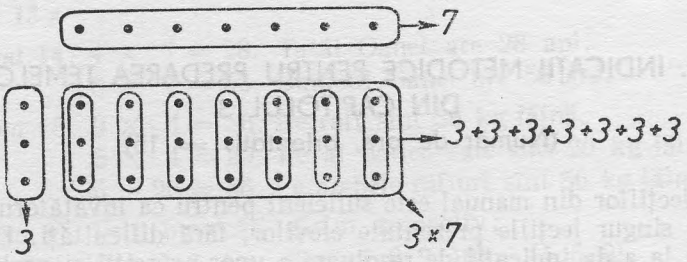


Fig. 200

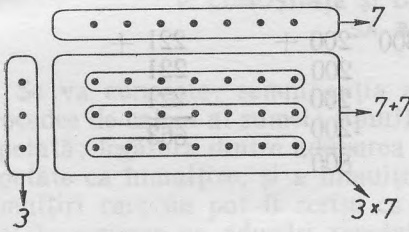


Fig. 201

Exercițiul 11, *tema a 3-a*
3 × 7; a) fig. 199; b) fig. 200; c) fig. 201.

Capitolul 3

TABLA ÎNMULȚIRII

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Înmulțirea cînd avem factor pe 0 sau 1. Ideea întocmirii tablei înmulțirii cu ajutorul adunării repetate și a comutativității înmulțirii numerelor naturale. Învățarea tablei înmulțirii.

Exerciții și probleme simple de înmulțire.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Să cunoască modalități de calcul a produsului a două numere de la 0 la 10, dar să-și formeze automatisme de enunțare a produsului direct, fără calcul. În procesul învățării tablei înmulțirii, să dobîndească deprinderea recunoașterii problemelor care se rezolvă prin înmulțire. În scrierea rezolvării problemelor cu ajutorul operației de înmulțire, să se obișnuiască a scrie numărul ce se repetă ca termen al adunării, ca al doilea factor al înmulțirii, primul factor arătînd de cîte ori se repetă al doilea ca termen al adunării (în marea majoritate a problemelor înmulțirea intervine în locul unei adunări repetate). În orice caz, se va observa că produsul reprezintă același fel de unități ca și numărul ce se repetă ca termen al adunării scrise prescurtat prin acea înmulțire.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ = 15)

Textul lecțiilor din manual este suficient pentru ca învățătorul să-și poată construi singur lecțiile prezentate elevilor, fără dificultăți. De aceea ne vom limita la a da indicații de rezolvare a unor exerciții și probleme.

Tema a 4-a

Exercițiul 2: $2 \times 2 = 4$; $2 \times 4 = 8$; $2 \times 6 = 12$.

Exercițiul 3: $2 + 2 = 4$; $4 + 2 = 6$; $6 + 2 = 8$.

Exercițiul 4: $3 \times 2 = 6$; $5 \times 2 = 10$; $8 \times 2 = 16$.

Exercițiul 5: $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$; $2 \times 7 = 14$.

Problema 6: $2 \times 6 = 12$. Maria are 12 nuci.

Problema 7: $2 \times 8 = 16$. Florin are acum în colecție 16 timbre.

Problema 8: $1 \times 2 = 2$; $8 \times 2 = 16$; $2 \times 2 = 4$; $6 \times 2 = 12$; $4 \times 2 = 8$. Se vede că elementele mulțimii A care înmulțite cu 2 dau produsul mai mare ca 10, sînt 8 și 6.

Problema 9: $2 \times 4 = 8$; $2 \times 3 = 6$; $2 \times 5 = 10$; $2 \times 8 = 16$. Segmentul căutat are respectiv: 8 cm, 6 cm; 10 cm; 16 cm.

Tema a 5-a

Problema 3: $3 \times 6 = 18$. În al doilea coș sînt 18 kg de mere.

Exercițiul 4: $7 \times 2 = 2+2+2+2+2+2+2 = 14$; $7 \times 2 = 7 + 7 = 14$ etc.

Problema 6: Figura 202.

Problema 7: b) $3 \times 2 = 6$. Lungimea segmentului construit va avea 6 laturi de pătrățele de caiet.

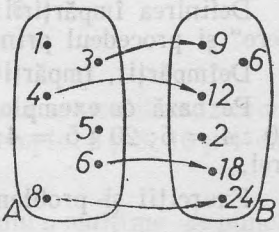


Fig. 202

Tema a 7-a

Problema 4: $5 \times 3 = 15$. Pe toate caietele dă 15 lei.

Tema a 8-a

Problema 5: $5 \times 8 = 40$. Orezul a costat 40 lei.
$4 \times 9 = 36$. Zahărul a costat 36 lei.
$40 + 36 = 76$. Orezul și zahărul împreună au costat 76 lei.

Problema 6: $4 \times 8 = 32$. Cărțile au costat 32 lei.
$42 - 32 = 10$. Mărioarei i-au mai rămas 10 lei.

Problema 7: Fie că se completează figura din manual, după ce a fost făcută mai întîi pe caiet, și numărînd găsim 45 de gropi, fie că se observă operația $5 \times 9 = 45$.

Partea a doua a problemei cere, în fond, perimetrul:
$27 + 27 = 54$; $15 + 15 = 30$; $54 + 30 = 84$. Gardul va avea 84 m.
Sau: $27 + 15 = 42$; $42 + 42 = 84$. Același rezultat.

Tema a 13-a

Problema 14: $4 \times 7 = 28$. Tatăl Oanei are 28 ani.
$8 \times 7 = 56$. Bunicul Oanei are 56 ani.

Problema 15: $9 \times 4 = 36$. Pe raft sînt 36 kg făină.
$5 \times 4 = 20$. Pe al doilea raft sînt 20 kg făină.
$36 + 20 = 56$. Pe ambele rafturi sînt 56 kg făină.

Problema 17. Prin încercări găsim, respectiv:
$\{0, 1, 2, 3\}$; $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $\{4, 5, 6\}$.

VI. ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE

Capitolul 1

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND SEPARAREA DE SUBMULȚIMI DISJUNCTE, FIECARE AVÎND ACELAȘI NUMĂR DE ELEMENTE

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Separarea unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, avînd fiecare același număr de elemente, folosind: procedeul prin „cuprindere" (dacă ni se dă cîte elemente trebuie să fie într-o submulțime); procedeul prin „părți egale" (dacă ni se dă cîte submulțimi trebuie formate).

Definirea împărțirii numerelor naturale folosind procedeul „prin cuprindere" și procedeul prin „părți egale".

Deîmpărțit, împărțitor, cît, termenii împărțirii.

Pe bază de exemple se va deduce că, fiind adevărată una din scrierile: $20 : 4 = 5$; $20 : 5 = 4$; $4 \times 5 = 20$; $5 \times 4 = 20$, sînt adevărate și celelalte trei.

Exerciții și probleme simple de împărțire.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII*

Sînt cele conținute în programa expusă mai sus și în manual, fiind necesară evidențierea unor aspecte nemenționate în mod explicit.

Trebuie observat că *la separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, alegerea procedeului „prin cuprindere" sau a celui prin „părți egale" nu este o chestiune de preferință*, după voia noastră, *ci se impune unul sau altul din aceste procedee. după conținutul problemei practice care trebuie rezolvată.*

În adevăr, în problemele de această natură ni se spune fie care sînt elementele mulțimii și numărul de elemente ce trebuie să fie într-o submulțime — caz în care se folosește procedeul „prin cuprindere" (vezi descrierea lui la indicațiile metodice) — fie care sînt elementele mulțimii și numărul submulțimilor care trebuie obținut — caz în care se folosește procedeul prin „părți egale" (de asemenea descris la indicațiile metodice).

Deoarece marea majoritate a problemelor de împărțire întîlnite la acest nivel de învățămînt sînt desprinse din situații practice de viață de felul unuia din cele două tipuri de probleme menționate mai sus, rezultă că nu putem lipsi elevii de niciunul din procedeele zise prin „cuprindere" sau prin „părți egale", fără a le reduce șansele de rezolvare a problemelor de împărțire.

---

* În legătură cu împărțirea, ca peste tot în carte, nu se va urmări ca elevii să reproducă fidel diversele propoziții formulate, ci să sesizeze faptul matematic conținut în ele, pe baza exemplelor ce se vor analiza.

Se va observa că înlocuind mulțimea ce a fost împărțită în submulțimi disjuncte între ele, fiecare având același număr de elemente, cu alta având tot atîtea elemente ca ea:

a) *dacă păstrăm același număr de elemente într-o submulțime, nu se modifică numărul de submulțimi obținute;*

b) *dacă păstrăm același număr de submulțimi, nu se modifică numărul elementelor obținut într-o submulțime.*

Această observație creează posibilitatea efectuării împărțirii numerelor naturale, de exemplu 18 : 6, prin:

Procedeul prin „cuprindere":

1° Se ia o mulțime model cu 18 elemente (de exemplu, o mulțime de puncte).

2° Se separă în ea, atît cît este posibil, submulțimi disjuncte, fiecare avînd același număr de elemente, egal cu 6.

3° Dacă nu au rămas elemente necuprinse în submulțimile respective, cu care să nu mai putem completa o nouă submulțime, numărăm cîte submulțimi s-au obținut.

Rezultatul numărării este cîtul împărțirii 18 : 6.

$$18 : 6 = 3.$$

Dacă rămîn elemente cu care nu putem face o nouă submulțime, zicem că împărțirea numerelor respective nu este posibilă. (Exemple: 8 și 3; 10 și 4 etc.).

Procedeul prin „părți egale".

1° Se ia o mulțime model cu 18 elemente (de exemplu o mulțime de puncte).

2° Se „distribuie" elementele mulțimii model în 6 submulțimi disjuncte toate avînd același număr de elemente.

3° Dacă nu au rămas elemente care nu mai pot fi „distribuite" cu păstrarea aceluiași număr de elemente în fiecare submulțime, numărăm cîte elemente au revenit într-o submulțime.

Rezultatul numărării este cîtul împărțirii 18 : 6.

$$18 : 6 = 3.$$

Dacă au rămas elemente care nu mai pot fi distribuite în submulțimile formate, cu păstrarea aceluiași număr de elemente în aceste submulțimi, zicem că împărțirea numerelor respective nu este posibilă. (Exemple: 7 și 2; 15 și 6 etc.).

Din exemple se va desprinde observația că, la separarea unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele fiecare având același număr de elemente, **numărul submulțimilor obținute cu cîte n elemente fiecare, cu ocazia aplicării procedeului prin „cuprindere", este egal cu numărul elementelor obținute într-o submulțime, cu ocazia aplicării procedeului prin „părți egale", dacă formăm n submulțimi.** (Elevii nu vor reține enunțul ci faptul sesizat.)

Această observație ne asigură că, *la împărțirea a două numere naturale obținem același rezultat fie că o efectuăm cu procedeul prin „cuprindere", fie că o efectuăm cu procedeul prin „părți egale".* Cunoașterea ambelor procedee este însă necesară pentru a putea recunoaște că o anumită problemă practică se rezolvă prin împărțire.

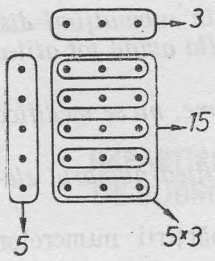


Fig. 203

Valorificînd figuri de felul figurii 203, obținute cu ocazia separării unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, se va observa că sînt simultan adevărate scrierile:

$5 \times 3 = 15;\ 15 : 3 = 5$ (efectuată prin cuprindere)

$3 \times 5 = 15;\ 15 : 5 = 3$ (efectuată prin părți egale)

ceea ce arată existența unei strînse legături între operațiile de înmulțire și împărțire și oferă posibilitatea de a face probele operațiilor de înmulțire și împărțire.

Termeni și notații ce se vor folosi:

Procedeul prin „cuprindere" și prin „părți egale"; împărțire, deîmpărțit, împărțitor, cît, termenii împărțirii.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ = 8)

TEMA 1: EXERCIȚII ȘI PROBLEME PREGĂTITOARE

Scop: Reamintirea noțiunii de submulțime sau parte a unei mulțimi și a definiției scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa. Introducerea noțiunii de scădere repetată. Cunoașterea separării unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, avînd fiecare același număr de elemente, folosind: a) procedeul prin „cuprindere"; b) procedeul prin „părți egale".

Recomandări metodice pentru predarea temei

Ne vom ocupa doar de separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, deoarece realizarea celorlalte obiective menționate mai sus nu poate întîmpina dificultăți.

Procedeul prin „cuprindere"

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Pe catedră este așezată o cutie conținînd 15 discuri negre (din cele de la trusa pentru adunarea și scăderea numerelor naturale).

Se cere elevilor să separe mulțimea discurilor din cutie în submulțimi disjuncte, fiecare submulțime avînd cîte 3 discuri (aceste submulțimi urmînd a fi așezate pe catedră separat una de alta).

După scurte discuții asupra modului în care poate fi îndeplinită cerința formulată, se stabilește următorul procedeu de lucru: *se iau din cutie tot cîte 3 discuri negre și se așază pe catedră, sub formă de „grămezi", separate de cele așezate anterior, pînă se termină discurile din cutie.*

Un elev este scos la catedră și execută practic cele spuse mai sus. Se observă că în cutie nu rămîne nici un disc. De asemenea, se observă că s-au obținut

5 submulțimi pe catedră, adică tocmai de cîte ori am putut lua cîte 3 discuri din cele 15 aflate în cutie.

Vom spune că 3 se cuprinde în 15 de 5 ori, iar procedeul de separare în submulțimi pe care l-am folosit îl numim „prin cuprindere".

Elevii vor executa în bănci, sub formă de muncă independentă, aceeași sarcină, folosind: boabe de grîu, castane etc..

Se fac probleme asemănătoare alegînd alte mulțimi, dar avînd grijă de fiecare dată a lua numărul elementelor dintr-o submulțime astfel încît, în final, să nu rămînă elemente ale mulțimii alese, necuprinse în aceste submulțimi.

După ce procedeul de lucru va fi bine cunoscut de elevi, învățătorul va face, pe rînd, separarea în submulțimi disjuncte între ele fiecare avînd același număr de elemente, egal cu 4, a mulțimilor formate din 12: discuri negre; 12 triunghiuri albastre; 12 pătrate roșii.

De fiecare dată se va constata că se obțin 3 submulțimi. Așadar, *numărul submulțimilor obținute este perfect determinat numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul elementelor dintr-o submulțime, și nu este influențat de natura acestor elemente.*

Această observație va deveni mai evidentă cînd învățătorul, după rezolvarea practică a problemei de către elevi, va explica de fiecare dată procedeul ce s-a folosit, în felul următor:

1° Execută pe tablă diagrama Euler-Venn a mulțimii date inițial pentru a fi separată în submulțimi, ca în figura 204.

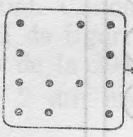


Fig. 204

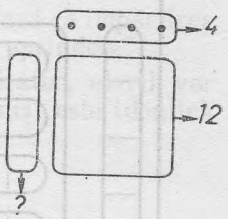


Fig. 205

2° Execută pe tablă, alăturat, figura 205 în care sînt 3 linii închise reprezentînd 3 mulțimi: cea de sus în care s-au figurat 4 puncte arată cîte elemente trebuie să luăm în fiecare submulțime; în cea din stînga vom desena cîte un punct pentru fiecare submulțime separată din mulțimea inițială; în cealaltă linie închisă rămasă vom figura tot cîte o submulțime de 4 puncte, de fiecare dată cînd separăm din mulțimea indicată în figura 204 cîte o submulțime de 4 puncte.

3° Se trece la realizarea practică a celor explicate mai sus, pe etape.

Etapa 1: Figura 204 ia aspectul figurii 206 și figura 205 ia aspectul figurii 207, după separarea primei submulțimi de 4 elemente.

Etapa a 2-a: Figura 206 ia aspectul figurii 208 și figura 207 ia aspectul figurii 209, după separarea celei de a doua submulțimi de 4 elemente.

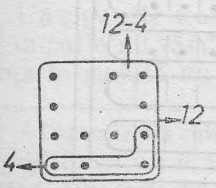


Fig. 206

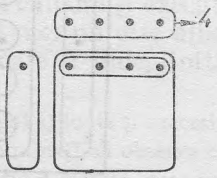


Fig. 207

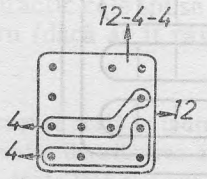


Fig. 208

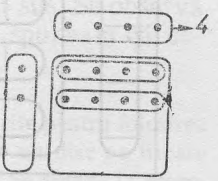


Fig. 209

Etapa a 3-a: Figura 208 ia aspectul figurii 210 și figura 209 ia aspectul figurii 211, după separarea celei de a treia submulțimi, cînd, în cazul nostru, procedeul nu mai poate fi continuat.

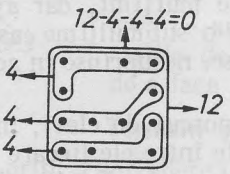


Fig. 210

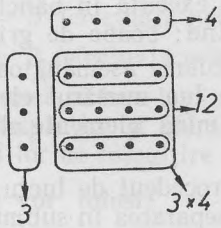


Fig. 211

Etapele de mai sus pot fi realizate pe un panou al trusei, ca în figurile 205* 207*, 209* și 211*.

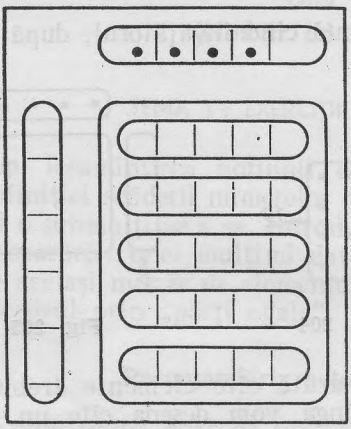


Fig. 205 *

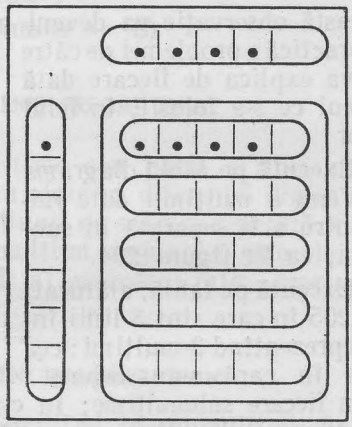


Fig. 207 *

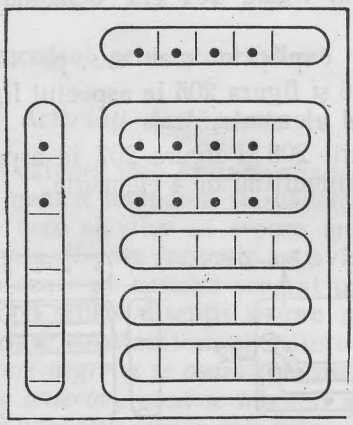


Fig. 209 *

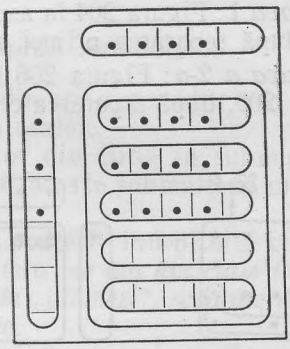


Fig. 211 *

Se constată că, repetînd procedeul de mai sus utilizat în cazul în care mulțimea inițială a constat din 12 discuri negre, pentru cazul cînd ea a fost înlocuită cu 12 triunghiuri albastre, cu 12 pătrate roșii etc., pe tablă se obțin de fiecare dată aceleași figuri (iar pe panoul trusei, același aspect).

Așadar, *separînd dintr-o mulțime de 12 elemente* (indiferent care ar fi acestea), *submulțimi disjuncte între ele de cîte 4 elemente fiecare, se obțin totdeauna 3 submulțimi.*

Observăm că în figura 211 mulțimea din stînga are 3 elemente, atîtea cîte submulțimi s-au obținut, iar mulțimea de sus are 4 elemente, atîtea cîte s-au separat în fiecare submulțime.

Ținînd seama de aspectul figurii 211 și de definiția înmulțirii cu ajutorul mulțimii produs, se vede că avem:

$$12 = 3 \times 4.$$

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschid manualele la partea a 6-a, cap. 1, tema 1, subtema: „b) Separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, avînd numărul elementelor cunoscut".

Se privesc cele două ilustrații. Prin discuții se subliniază că împărțirea fructelor în farfurioare s-a făcut prin procedeul zis prin „cuprindere".

Se citește apoi problema din manual. Conduși de învățător, elevii vor observa că rezolvarea pe etape sugerată de figurile din manual este identică cu cele explicate la tablă prin figurile de la 204 la 211.

Se rezolvă în clasă exercițiile 1 și 2 din manual.

Procedeul prin „părți egale"

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se așază pe catedră aceeași cutie conținînd 15 discuri negre. Se cere elevilor să separe mulțimea discurilor din cutie în 3 submulțimi disjuncte, fiecare avînd același număr de elemente (aceste submulțimi urmînd a fi așezate pe catedră separat una de alta, fiecare pe cîte o carte, de exemplu).

După scurte discuții asupra modului în care poate fi îndeplinită cerința formulată, se stabilește următorul procedeu de lucru: *se așază pe catedră 3 cărți* (cîte submulțimi trebuie formate); *se iau din cutie 3 discuri negre și se distribuie cîte unul pe fiecare carte*; *se iau apoi 3 discuri negre din cele rămase în cutie și se distribuie cîte unul pe fiecare carte*; *se continuă același procedeu pînă se epuizează discurile din cutie*[1].

Un elev este scos la catedră și execută practic cele spuse mai sus. Se observă că în cutie nu rămîne nici un disc albastru (dacă ar fi rămas spuneam că cerința formulată nu poate fi îndeplinită).

---

[1] Discurile din cutie pot fi luate și succesiv (cum se arată în îndrumările pentru folosirea trusei). Elevii vor fi determinați să observe că pentru distribuirea a cîte un disc pe fiecare carte trebuie luate din cutie 3 discuri, ceea ce se poate face și simultan. Se ajunge la procedeul expus mai sus.

De asemenea, se observă că procedeul folosit asigură obținerea aceluiași număr de elemente în fiecare din cele 3 submulțimi, motiv pentru care el se numește prin „părți egale". (Este un abuz de limbaj, deoarece cele 3 submulțimi obținute nu sînt egale, nefiind formate din exact aceleași elemente. Numai numerele de elemente ale lor sînt egale.)

Se mai observă că *în fiecare submulțime vom pune de atîtea ori cîte un element, de cîte ori putem lua cîte 3 elemente din cele 15 elemente.* Așadar, **dintr-o mulțime cu 15 elemente revin tot atîtea elemente în 3 submulțimi echipotente disjuncte între ele, cîte submulțimi de cîte 3 elemente disjuncte între ele pot fi formate din mulțimea celor 15 elemente.** (Elevii nu vor reține enunțul ci faptul semnalat.)

Astfel de observații vor fi făcute cu răbdare la toate exemplele următoare, pînă ideile respective vor fi sesizate și reținute de elevi, trecînd cu vederea eventualele imperfecțiuni în exprimare, mai ales la început.

Elevii vor executa în bănci sub formă de muncă independentă aceeași sarcină, folosind boabe de grîu, castane etc.

Se fac probleme asemănătoare alegînd alte mulțimi, dar avînd grijă de fiecare dată să se ia numărul de submulțimi astfel încît, în final, să nu rămînă elemente ale mulțimii alese, necuprinse în aceste submulțimi.

După ce procedeul de lucru va fi bine însușit de elevi, se va propune, pe rînd, separarea în 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, a mulțimilor formate din: 12 discuri negre; 12 triunghiuri albastre; 12 pătrate roșii (toate fiind luate din trusa învățătorului).

De fiecare dată se va constata că se obțin 3 elemente într-o submulțime. Așadar, *numărul elementelor obținut într-o submulțime este perfect determinat numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul de submulțimi ce trebuie formate, și nu este influențat de natura elementelor.*

Această observație va deveni mai evidentă cînt învățătorul, după rezolvarea practică a problemei de către elevi, va explica de fiecare dată procedeul care s-a folosit, în felul următor:

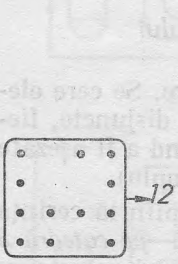


Fig. 212

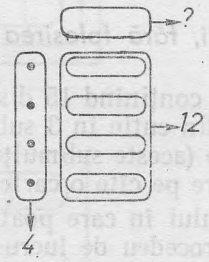


Fig. 213

1° Execută pe tablă diagrama Euler-Venn a mulțimii date inițial pentru a fi separată în submulțimi, ca în figura 212.

2° Execută pe tablă, alăturat, figura 213, în care: linia închisă situată „vertical" în stînga conține 4 puncte, arătînd cîte submulțimi trebuie separate din mulțimea inițială; în dreapta ei este o linie închisă ce reprezintă mulțimea inițială cu 12 elemente, în interior fiind figurate prin linii închise cele 4 submulțimi disjuncte ce trebuie formate (necunoscînd cîte elemente are una din ele, elementele lor nu pot fi încă figurate); deasupra acesteia este o linie închisă în care vom desena cîte un punct de fiecare dată cînd vom distribui cîte un element în submulțimile ce trebuie formate, din cele 4 elemente pe care le luăm, succesiv, din mulțimea inițială indicată în figura 212.

3° Se trece la realizarea practică, pe etape, a celor explicate mai sus.

Etapa 1: Se separă în figura 212 o submulțime de 4 elemente; aceasta luînd aspectul din figura 214. Prin distribuirea lor în cele 4 submulțimi, arătate în figura 213, figura 213 ia aspectul din figura 215.

Etapa a 2-a: Figura 214 ia aspectul din figura 216 și figura 215 ia aspectul din figura 217, după separarea celei de a doua submulțimi din mulțimea inițială și distribuirea elementelor ei în cele 4 submulțimi din figura 215.

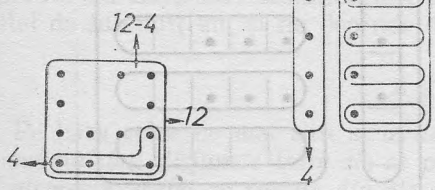


Fig. 214 Fig. 215

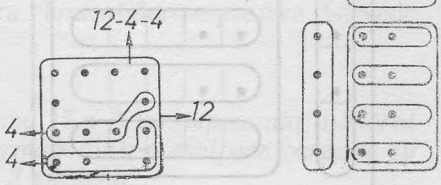


Fig. 216 Fig. 217

Etapa a 3-a: Figura 216 ia aspectul din figura 218 și figura 217 ia aspectul din figura 219, după separarea celei de a treia submulțimi din mulțimea inițială și distribuirea elementelor ei în cele 4 submulțimi din figura 217. Se vede că procedeul nu mai poate fi continuat, elementele mulțimii inițiale fiind epuizate.

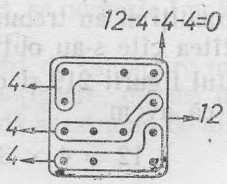


Fig. 218

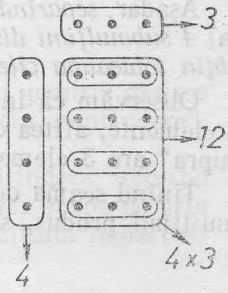


Fig. 219

Etapele de mai sus pot fi realizate pe un panou al trusei, ca în fig. 213*, 215*, 217* și 219*.

Dacă aplicăm procedeul de mai sus în cazul în care înlocuim mulțimea celor 12 discuri negre, cu 12 triunghiuri albastre sau cu 12 pătrate roșii, se constată că de fiecare dată pe tablă se obțin aceleași figuri (iar pe panoul trusei, același aspect).

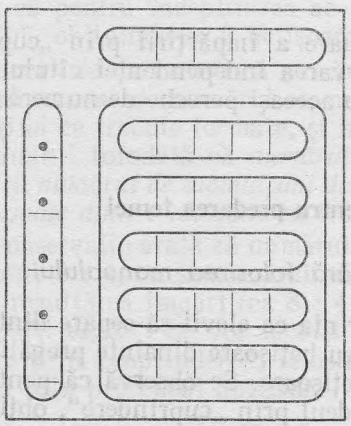


Fig. 213*

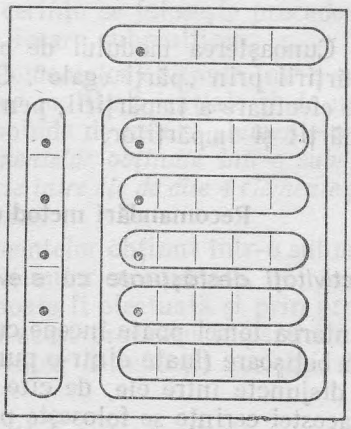


Fig. 215*

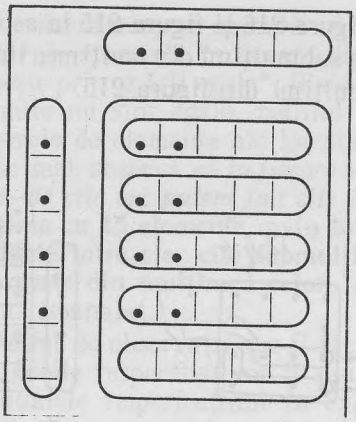


Fig. 217*

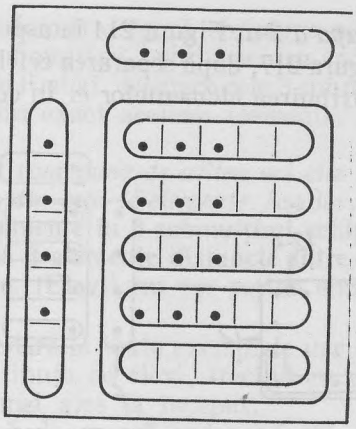


Fig. 219*

Aşadar, *separînd dintr-o mulţime cu 12 elemente* (indiferent care ar fi aceasta) *4 submulţimi disjuncte între ele, fiecare avînd acelaşi număr de elemente, se obţin totdeauna cîte 3 elemente într-o submulţime.*

Observăm că în figura 219 mulţimea din stînga (desenată „vertical") are 4 elemente, atîtea cîte submulţimi au trebuit formate, iar mulţimea de „deasupra" are 3 elemente, atîtea cîte s-au obţinut în fiecare submulţime.

Ţinînd seama de aspectul figurii 219 şi de definiţia înmulţirii cu ajutorul mulţimii produs, se vede că avem

$$12 = 4 \times 3.$$

b) *Activităţi desfăşurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se organizează prin analogie cu cele recomandate în legătură cu procedeul prin „cuprindere".

TEMA A 2-A: ÎMPĂRŢIREA NUMERELOR NATURALE CU AJUTORUL SEPARĂRII DE SUBMULŢIMI DISJUNCTE, AVÎND ACELAŞI NUMĂR DE ELEMENTE

Scop: Cunoaşterea modului de efectuare a împărţirii prin „cuprindere" şi a împărţirii prin „părţi egale". Observarea independenţei cîtului de procedeul de efectuare a împărţirii, pentru o aceeaşi pereche de numere naturale ca deîmpărţit şi împărţitor.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activităţi desfăşurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Prezentarea temei poate începe cu cerinţa ca elevii să separe dintr-o mulţime de 8 beţişoare (luate dintr-o pungă cu beţişoare dinainte pregătită), submulţimi disjuncte între ele, de cîte 4 beţişoare. Se observă că pentru îndeplinirea acestei cerinţe se foloseşte procedeul prin „cuprindere", obţinîndu-se 2 submulţimi.

Prin discuții cu elevii se va aminti din alte lecții că înlocuind cele 8 beți-șoare cu 8 grăunțe, 8 monede etc., și separînd tot submulțimi disjuncte de cîte 4 elemente, se obțin de fiecare dată 2 submulțimi. Numărul acestor submulțimi se notează și

$$8 : 4$$

și el depinde numai de numărul 8 al elementelor mulțimii în care dorim să separăm submulțimile disjuncte între ele și de numărul 4 al elementelor unei astfel de submulțimi, și nu depinde de natura elementelor respective. Se vede că

$$8 : 4 = 2.$$

Pe baza celor de mai sus, *scrierile de forma* 15 : 3 *vor reprezenta numărul de submulțimi disjuncte între ele ce pot fi formate dintr-o mulțime oarecare cu 15 elemente, astfel ca fiecare din ele să aibă 3 elemente.*

Scrierile de acest fel arată o nouă operație cu numere naturale numită împărțire. Avem:

$$15 : 3 = 5$$

deîmpărțit împărțitor cît

: este semnul operației de împărțire. Procedeul expus aici pentru găsirea lui 5, rezultatul împărțirii lui 15 la 3, se numește împărțire prin „cuprindere". Zicem că 3 se cuprinde în 15 de 5 ori.

Se vor efectua mai multe exerciții de împărțire prin cuprindere, folosind pentru deîmpărțit mulțimi model (bețișoare, discuri din trusă, boabe de grîu etc.), pentru ca toți elevii să deprindă acest mod de aflare a cîtului împărțirii a două numere:

$$12 : 4 = \quad ; \qquad 15 : 5 = \quad ; \qquad 18 : 6 = \quad ; \qquad \text{etc.}$$

Astfel de împărțiri vor fi efectuate și cu ajutorul panourilor corespunzătoare din trusa învățătorului.

Cu ocazia acestor exerciții se va avea grijă a fi puse clar în evidență etapele de efectuare a împărțirii prin cuprindere, care au fost expuse mai înainte la „Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii".

Se va propune apoi ca elevii să separe dintr-o mulțime de 8 bețișoare, 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare conținînd același număr de elemente. Se observă că pentru îndeplinirea acestei cerințe se folosește procedeul prin „părți egale", obținîndu-se 2 bețișoare în fiecare submulțime.

Prin discuții se va aminti că numărul elementelor obținute într-o submulțime depinde numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul de submulțimi ce trebuie formate, și nu depinde de natura elementelor.

Se va aminti totodată că *numărul elementelor obținute într-o submulțime este același cu numărul de submulțimi disjuncte între ele de cîte 4 elemente fiecare, ce pot fi formate dintr-o mulțime cu 8 elemente.*

Ultima observație arată că numărul elementelor obținut într-o submulțime poate fi notat 8 : 4, ca și numărul submulțimilor menționate.

De aici rezultă că împărțirea 8 : 4 = poate fi efectuată și prin procedeul zis prin „părți egale". Se vor face și prin acest procedeu împărțirile făcute mai înainte prin „cuprindere", folosind pentru deîmpărțit aceleași mulțimi model ca și prin procedeul anterior:

$$12 : 4 = \quad ; \qquad 15 : 5 = \quad ; \qquad 18 : 6 = \quad ; \qquad \text{etc.}$$

Astfel de împărțiri vor fi efectuate și cu ajutorul panourilor corespunzătoare din trusa învățătorului.

Cu ocazia efectuării acestor împărțiri se va avea grijă să fie puse clar în evidență etapele de efectuare a împărțirii prin „părți egale", care au fost expuse de asemenea la „Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii".

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

În funcție de modul în care vor putea fi dozate cunoștințele în cadrul orelor, tema respectivă va fi citită din manual și analizat conținutul din perspectiva celor studiate fără folosirea manualului, în trei reprize: una se va referi la împărțirea prin cuprindere; una se va referi la împărțirea în „părți egale"; una se va referi la efectuarea exercițiilor și problemelor cuprinse în manual, din care o parte se vor face în clasă cu rolul de fixare a cunoștințelor, restul vor fi propuse ca temă pentru acasă, dar vor fi discutate amănunțit în clasă în orele următoare.

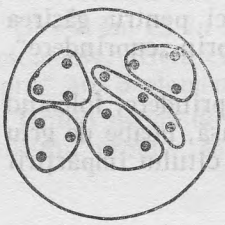


Fig. 220

Indicații pentru rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 2-a

Exercițiile ce urmează după „Exemplu"

Se iau mulțimi model pentru deîmpărțit (de exemplu mulțimi de puncte), se separă în submulțimi disjuncte fiecare avînd atîtea elemente cît este împărțitorul. Cîtul se află numărînd cîte submulțimi s-au obținut.

15 : 3 = 5 (fig. 220) etc.

Exercițiile ce urmează după „Alt exemplu"

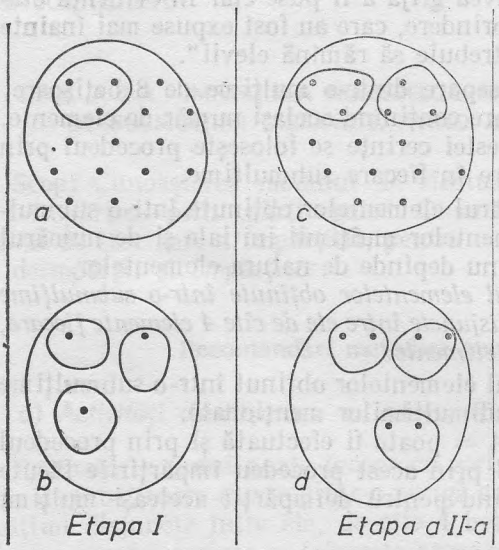


Fig. 221

Exercițiul 1

Se iau mulțimi model pentru deîmpărțit (de exemplu mulțimi de puncte) și se folosește procedeul prin „părți egale".

15 : 3 = 5 (fig. 221) etc.

Exercițiul 3

Se va folosi, pe rînd, procedeul prin „cuprindere" și procedeul prin „părți egale", aplicate pentru o mulțime model aleasă după voie pentru deîmpărțit.

Exercițiile și problemele de la sfîrșitul temei a 2-a

Problema 3

6 : 3 = 2 efectuată prin cuprindere; 6 : 2 = 3 efectuată prin părți egale; 2 × 3 = 6 conform definiției înmulțirii cu mulțimea

produs; $3 \times 2 = 6$ conform aceleiași definiții sau scriind întîi din figură $2 \times 3 = 6$ și aplicînd comutativitatea înmulțirii.

Problema 4

a) $21 : 7 = 3$ $20 : 5 = 4$. b) $21 : 3 = 7$; $20 : 4 = 5$.
c) $3 \times 7 = 21$ și $7 \times 3 = 21$; $4 \times 5 = 20$ și $5 \times 4 = 20$.

Problema 5

$24 : 8 = 3$ efectuată prin cuprindere; $24 : 3 = 8$ efectuată prin părți egale; $3 \times 8 = 24$ efectuată prin adunare repetată; $8 \times 3 = 24$, din figură deducem $3 \times 8 = 24$ și aici folosim comutativitatea.

Problema 6

a) $10 : 5 = 2$; $24 : 6 = 4$; $27 : 9 = 3$. b) $10 : 2 = 5$; $24 : 4 = 6$ $27 : 3 = 9$. c) $2 \times 5 = 10$; $4 \times 6 = 24$; $3 \times 9 = 27$ și, respectiv, prin comutativitate $5 \times 2 = 10$; $6 \times 4 = 24$; $9 \times 3 = 27$.

Observație: Aici și la problema 5 mai sus, înmulțirile ce pot fi făcute se deduc și completînd figurile ca în figura 222; etc.

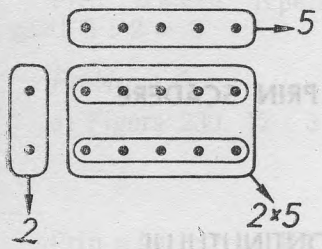


Fig. 222

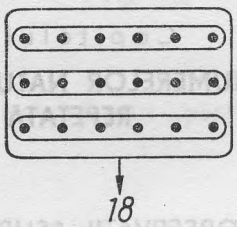


Fig. 223

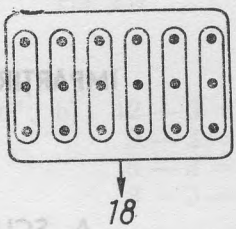


Fig. 224

Problema 7

Figura 223. $18 : 3 = 6$; Fig. 224. $18 : 6 = 3$;
Figura 225. $18 : 3 = 6$; Fig. 226. $18 : 6 = 3$.

Problema 8

Figura 227. $28 : 4 = 7$ efectuată prin cuprindere.

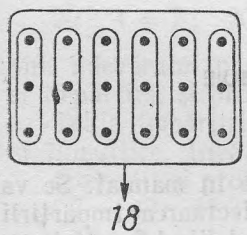


Fig. 225

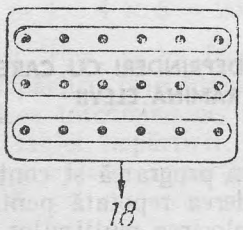


Fig 226

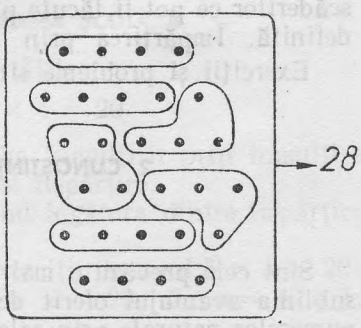


Fig. 227

Problema 9

Figura 228. 42 : 7 = 6 efectuată prin părți egale (procedeul este același care a fost sugerat în figura 221).

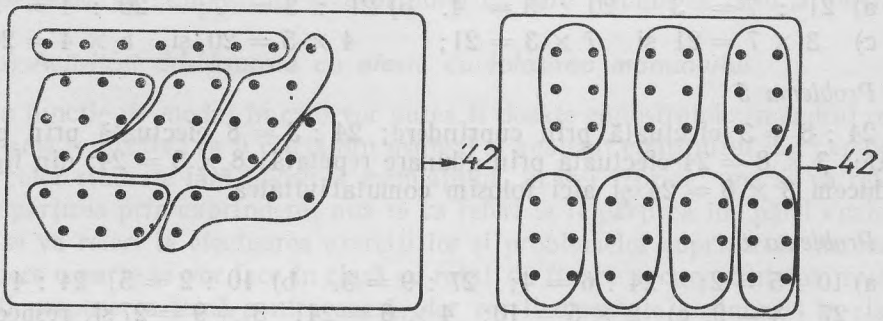


Fig. 228

Capitolul 2

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE PRIN SCĂDERE REPETATĂ

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Analizînd modul de efectuare a împărțirii numerelor naturale cu ajutorul unei mulțimi model pentru deîmpărțit și folosind procedeul prin „cuprindere" sau cel prin „părți egale", se va deduce posibilitatea de calcul a cîtului prin scădere repetată a împărțitorului din deîmpărțit. Cîtul este tocmai numărul scăderilor ce pot fi făcute pînă se obține restul 0. Împărțirea prin 0 nu este definită. Împărțirea prin 1.

Exerciții și probleme simple.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Sînt cele prevăzute mai sus în programă și conținute în manual. Se va sublinia avantajul oferit de scăderea repetată pentru efectuarea împărțirii numerelor naturale prin calcul, folosirea mulțimilor model fiind foarte incomodă.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 2

(Număr de ore, orientativ = 3)

Elaborarea lecțiilor de către învățător, folosindu-se de programă și manual, nu poate crea dificultăți.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la capitolul 2

Exercițiul 7

a) Se va folosi procedeul prin „cuprindere", apoi procedeul prin „părți egale".

Problema 8

a) Figura 229. $6 : 2 = 3$ efectuată prin „cuprindere";

b) $6 - 2 = 4$
$4 - 2 = 2$
$2 - 2 = 0$

Prin scădere repetată am găsit $6 : 2 = 3$



Fig. 229

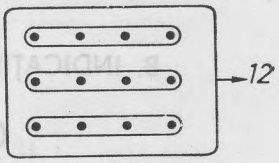


Fig. 230

Problema 9

a) Figura 230. $12 : 3 = 4$ efectuată prin „părți egale"; b) $12 - 3 = 9$
$9 - 3 = 6$
$6 - 3 = 3$
$3 - 3 = 0$

Prin scădere repetată am găsit $12 : 3 = 4$.

Capitolul 3

LEGĂTURA DINTRE ÎNMULȚIRE ȘI ÎMPĂRȚIRE

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Pe baza observației făcute anterior că egalitățile:

$20 : 4 = 5$; $20 : 5 = 4$; $4 \times 5 = 20$; $5 \times 4 = 20$

sînt adevărate în același timp, se va face proba înmulțirii prin împărțire și împărțire, și proba împărțirii prin înmulțire și împărțire.

Tabla împărțirii. Ideea întocmirii ei, folosind legătura dintre împărțire și înmulțire. Învățarea tablei împărțirii.

Exerciții și probleme simple de împărțire. Exerciții de tipul $5 \times a = 20$; $a \times 7 = 42$; $48 : x = 8$, cu scrierea soluțiilor $a = 20 : 5$; $a = 42 : 7$; $x = 48 : 8$.

Exerciții și probleme cu toate operațiile învățate (nu prea complicate).

Să cunoască legătura dintre înmulțirea și împărțirea numerelor naturale. Să observe că dacă împărțim produsul a două numere naturale, la unul din cele două numere, obținem celălalt număr. Să poată face probele operațiilor de înmulțire și împărțire.

Elevii să știe să obțină tabla împărțirii folosindu-se de tabla înmulțirii și să cunoască pe de rost tabla împărțirii.

Să se formeze deprinderea de recunoaștere a problemelor care se rezolvă prin împărțire. În efectuarea împărțirilor rezultate din probleme, se va folosi tabla împărțirii sau scăderea repetată.

Se va cunoaște modul de calcul al unui factor al înmulțirii cînd știm produsul și celălalt factor, și modul de calcul al unui termen al împărțirii cînd știm cîtul și celălalt termen.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ = 7)

Elaborarea lecțiilor după programă și manual nu poate crea dificultăți.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la capitolul 3

Tema a 2-a: *Tabla împărțirii.*

Subtema (b)

Exercițiul 3

a) $20 : 2 = 10$; $12 : 2 = 6$; $16 : 2 = 8$. Etc.

Exercițiul 4

a) $20 - 2 = 18$; $12 - 2 = 10$; $16 - 2 = 14$ Etc.

Problema 9

$32 : 2 = 16$; $32 : 4 = 8$; $32 - 16 = 16$; $16 - 8 = 8$. 8 elevi joacă tenis.

Problema 12

$27 : 3 = 9$. Lățimea dreptunghiului este de 9 m.

$2 \times 27 = 27 + 27 = 54$; $2 \times 9 = 18$; $54 + 18 = 72$. Perimetrul este de 72 m.

Sau: $27 + 9 = 36$; $2 \times 36 = 36 + 36 = 72$. Perimetrul este de 72 m.

Subtema (c)

Problema 3

a) $35 : 5 = 7$; etc. b) $36 - 6 = 30$; etc. c) $36 : 6 = 6$; etc.

d) $21 : a = 7$
$a = 21 : 7$
$a = 3$

$49 : b = 7$
$b = 49 : 7$
$b = 7$

$63 : c = 7$
$c = 63 : 7$
$c = 9$

Exercițiul 4

$a \times 5 = 40$ $\quad a : 5 = 10$ $\quad 36 : a = 6$ etc.

$a = 40 : 5$ $\quad a = 10 \times 5$ $\quad a = 36 : 6$

$a = 8$ $\quad a = 50$ $\quad a = 6$

Problema 5

$30 : 6 = 5$. În acea clasă sînt 5 fete. $30 + 5 = 35$. Sînt 35 elevi în clasă.

Problema 6

$20 : 5 = 4$. O carte costă 4 lei.

$2 \times 4 = 8$. 2 cărți costă 8 lei.

Problema 8

$35 : 7 = 5$. A doua carte are 5 ilustrații.

$35 + 5 = 40$. Cele două cărți au 40 de ilustrații.

Problema 9

Efectuînd împărțirile, relațiile date se scriu:

$5 > x$; $\quad 5 \geqslant x$; $\quad 7 + x \leqslant 10$.

Prin încercări se găsește, pe rînd:

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $\quad \{0, 1, 2, 3\}$.

Subtema (d)

Problema 4

$9 \times a = 63$

$a = 63 : 9$

$a = 7$

Problema 5

$5 \times a = 45$ etc.

$a = 45 : 5$

$a = 9$

Problema 12

$32 : 8 = 4$. Un cearșaf are 4 m. $5 \times 4 = 20$. Pentru 5 cearșafuri sînt necesari 20 m de pînză.

Problema 14

$54 : 6 = 9$ Un kilogram de zahăr costă 9 lei.

$8 \times 9 = 72$ Pentru 8 kg zahăr se plătesc 72 lei.

$75 - 72 = 3$ De la 75 lei se primește rest 3 lei.

Problema 17

$72 : 9 = 8$ În punguță sînt 8 bomboane.

$72 - 8 = 64$ În cutie sînt 64 bomboane mai mult ca în punguță.

Problema 18

$22 - 8 = 14$

$22 + 14 = 36$

$36 : 9 = 4$ În fiecare grupă sînt 4 elevi.

Problema 19

$4 \times 9 = 36$ Zahărul a costat 36 lei.

$51 - 36 = 15$ Merele au costat 15 lei.

$15 : 3 = 5$ Kilogramul de mere a costat 5 lei.

Problema 20

13 — 5 = 8. Dacă bidonul ar conține apă cît și borcanul, împreună ar conține 8 l de apă.

8 : 2 = 4 În borcan se află 4 l de apă.
4 + 5 = 9 În bidon se află 9 l de apă.

Altă rezolvare:

13 + 5 = 18. Dacă borcanul ar conține atîta apă cît și bidonul, împreună ar conține 18 l de apă.

18 : 2 = 9 În bidon sînt 9 l de apă.
9 — 5 = 4. În borcan sînt 4 l de apă.

Problema 21

14 — 6 = 8
8 : 2 = 4 Caietul a costat 4 lei.
4 + 6 = 10 Cartea a costat 10 lei.

Sau:

14 + 6 = 20
20 : 2 = 10 Cartea a costat 10 lei.
10 — 6 = 4 Caietul a costat 4 lei.

Problema 22

Judecata ca la problemele 20 și 21. Răspuns: 9 oi negre și 28 oi albe.

Problema 23

16 : 8 = 2. Un singur segment are 2 cm.

VII. UNITĂȚI DE MĂSURĂ (8 ore)

SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Metrul, decametrul, hectometrul și kilometrul. Litrul, decalitrul, hectolitrul și kilolitrul. Kilogramul, chintalul și tona. Leul și banul. Ziua, ora, secunda, săptămîna, luna, anul. Calendarul. Citirea orei pe ceas.

Probleme diverse folosind unitățile de măsură învățate.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la partea a VII-a

După tema a 2-a

Problema 5

Figura 231. 23 dam + 17 dam = 40 dam

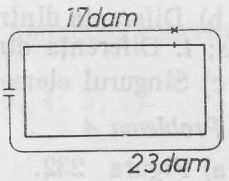


Fig. 231

Problema 7

10 × 10 = 100. Pe o parte a șoselei s-au plantat 100 de pomi.

100 + 100 = 200. Pe ambele părți ale șoselei s-au plantat 200 de pomi.

Problema 8

5 hm — 2 hm = 3 hm. Lățimea dreptunghiului este de 3 hm.

5 hm + 3 hm = 8 hm; 2 × 8 hm = 16 hm. Perimetrul este de 16 hm

Sau: 2 × 5 hm = 10 hm; 2 × 3 hm = 6 hm; 10 hm + 6 hm = 16 hm

După tema a 4-a, problema 5

67 kl — 38 kl = 29 kl; 67 kl + 29 kl = 96 kl.

După tema a 7-a

Problema 3

4 × 1 leu = 4 lei

4 × 10 bani = 40 bani

Costul a 4 caiete este 4 lei și 40 bani

Problema 4

8 lei + 1 leu = 9 lei

35 bani + 55 bani = 90 bani

Costul este de 9 lei și 90 bani

După tema a 9-a

Răspunsuri: Problema a 2-a: 7 ore; problema a 3-a: 1 oră și 30 minute; problema a 4-a: ora 10 și 30 minute; problema a 5-a: ora 12 fără 10 minute; problema a 6-a: 10 ani; problema a 7-a: 9 ani, 21 ani, 30 de ani.

VIII. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE (10 ore)

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse

Problema 2

Intersecția mulțimilor B și C conține numerele: 96; 97; 98; 99; 100; 101.

Problema 3

a) Intersecția dintre A și B conține: r; m. Intersecția dintre C și A conține: c; m. Intersecția dintre C și B conține: m; p.

b) Diferența dintre A și B conține: a; b; c. Diferența dintre B și C conține: r; s; t. Diferența dintre C și B conține: c; d.

c) Singurul element comun mulțimilor A, B și C este m.

Problema 4

a) Figura 232. b) Figura 233. c) Figura 234. d) Figura 235.

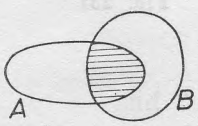


Fig. 232

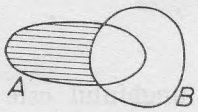


Fig. 233

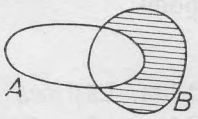


Fig. 234

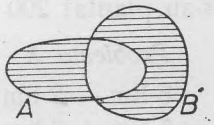


Fig. 235

Problema 5

a) $3 + 4 + 5 = 12$ b) $2 + 6 + 8 = 16$; c) $1 + 7 = 8$;

d) $39 + 21 + 100 = 160$.

e) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$= (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + + (4 + 5)$

$= 9 + 9 + 9 + 9$

$= 4 \times 9$

$= 36$

Problema 10

100 km + 30 km = 130 km. În prima zi s-au parcurs 130 km.

30 km + 130 km = 160 km. În a doua zi s-au parcurs 160 km.

130 km + 160 km = 290 km. În cele două zile s-au parcurs 290 km.

Problema 11

Mulțimea B are un singur element, 12; mulțimea C are un singur element, 25.

Problema 12

$(8 \times 3) + (4 \times 9) = 24 + 36 = 60$. Cumpărăturile au costat 60 lei.

Problema 16

$58 - (4 \times 8) = 58 - 32 = 26$. A doua zi au venit 26 muncitori.

Problema 18

$$4 \times (4 + 5) = 4 \times 9 = 36$$

Problema 20

Pentru primele două găsim prin încercări:

$\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Pentru al treilea exercițiu găsim mai întîi prin încercări $12 < (x \times 6)$ pentru oricare din numerele naturale mai mari ca 2; $\{3; 4; 5; ...\}$, iar apoi $(x \times 6) \leqslant 36$ pentru oricare din numerele naturale mai mici decît 7: $\{0: 1; 2; 3; 4; 5; 6;\}$. Scrierea

$$12 < (x \times 6) \leqslant 36$$

va fi adevărată pentru numerele naturale x care satisfac amîndouă condițiile de mai sus: 3, 4, 5 și 6.

* $x \in \{3; 4; 5;...\} \cap \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $x \in \{3; 4; 5; 6\}$

Problema 21

a) $F = \{4; 8\}$. b) $G = \{5\}$. c) $H = \{5; 6; 10\}$.

Problema 22

$40 = (4 \times 10) + 0$; $206 = (2 \times 100) + (0 \times 10) + 6$;

$700 = (7 + 100) + (0 \times 10) + 0$ etc.

Problema 23

$20 + 16 = 36$ Sau $20 : 4 = 5$ Cu toți elevii clasei s-au format
$36 : 4 = 9$ $16 : 4 = 4$ 9 rînduri.
$5 + 4 = 9$

Problema 32

Figura 236.

$A = \{1; 2; 5; 6\}$; $B = \{3; 4; 5; 6\}$

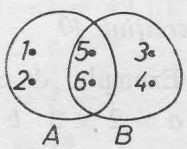


Fig. 236

Problema 33

a) $B = \{0; 3\}$ sau $B = \{3; 4\}$ sau $B = \{11; 7\}$ etc.

b) $B = \{1; 2\}$ sau $B = \{2; 1\}$. Deși s-a obținut aceeași mulțime, prima dată am făcut $a = 1$ și $b = 2$, a doua oară am făcut $a = 2$ și $b = 1$, deci sînt rezolvări diferite.

Problema 34

a) $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A și B au unele elemente comune: 4, 5 și 6.

b) $A = \{5, 6\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. A este inclusă în B. Elemente comune: 5, 6.

Problema 35

a) $E = \{278, 279\}$; $F = \{281, 282, 283\}$. E și F sînt mulțimi disjuncte.

b) $E = \{407, 408, 409, 410\}$; $F = \{407, 408, 409, 410\}$. E și F sînt mulțimi egale.

Problema 36

$B = \{28, 35, 43, 56\}$; $C = \{15, 21, 28, 35, 43\}$. a) Intersecția lui B cu C: $\{28, 35, 43\}$; b) diferența dintre B și C: $\{56\}$; c) diferența dintre C și B: $\{15, 21\}$.

Problema 37

{Ana, Dan, Elena}

Problema 38

a) {Monica, Costel}; b) {Vlad}.

Peste 32 de ani: a) { }; b) {Elena, Vlad}.

Peste 22 de ani: a) {Monica, Costel, Ana}; b) {Vlad}.

Problema 39

Din mulțimea persoanelor:

$E = \{$Monica, Costel, Ana, Dan, Elena, Vlad$\}$

avînd vîrstele, respectiv, 19, 22, 28, 36, 42 și 54 de ani, alegeți submulțimea B a persoanelor din E, a căror vîrstă peste 28 de ani va trece de 50 de ani, iar cu persoanele care peste 28 de ani vor avea cel mult 70 de ani, formați o submulțime C a mulțimii E.

Găsiți mulțimea persoanelor din E care peste 28 de ani:

a) vor fi trecute de 50 de ani dar nu vor depăși 70 de ani;

b) vor fi trecute de 70 de ani;

c) nu vor fi trecute de 50 de ani.

Exercițiul 40

Exemplu de calcul pentru $a = 2 \times 3$, $b = 1 \times 9$ și $c = 2 \times 8$:

$a = 2 \times 3 \quad b = 1 \times 9 \quad c = 2 \times 8 \quad (a \times b) + c = (6 \times 9) + 16$

$a = 6 \qquad b = 9 \qquad c = 16 \qquad\qquad = 54 + 16$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 70$

$(a \times b) + c = 70$

Exercițiul 41

a) $(5 + 2) \times 6 = 7 \times 6$ $\quad (5 \times 6) + (2 \times 6) = 30 + 12$

$= 42$ $\quad = 42$

$(5 + 2) \times 6 = 42$ $\quad (5 \times 6) + (2 \times 6) = 42$. Așadar,

scrierea: $(5 + 2) \times 6 = (5 \times 6) + (2 \times 6)$ este adevărată.

e) $(7 \times 6) + 3 = 42 + 3$ $\quad (7 + 3) \times (6 + 3) = 10 \times 9$

$= 45$ $\quad = 90$

$(7 \times 6) + 3 = 45$ $\quad (7 + 3) \times (6 + 3) = 90$. Așadar.

scrierea: $(7 \times 6) + 3 = (7 + 3) \times (6 + 3)$ este falsă.

Exercițiul 42

a) $(12 - 10) \times (12 + 10) = 2 + 22$, deci $(12 - 10) \times (12 + 10) = 44$

$= 22 + 22$

$= 44$

c) $121 + (5 \times 9) = 121 + 45$ deci $121 + (5 \times 9) = 166$

$= 166$

Problema 43

Scrierea rezolvării conduce la exercițiul (a) de la (42)

Problema 44

Scrierea rezolvărilor conduce, respectiv, la exercițiile (b), (c) și (d) de la (42)

Problema 45

a) $n + 7 = 18$

$n = 18 - 7$

$n = 11$

b) $n \times 7 = 56$

$n = 56 : 7$

$n = 8$

c) $(n + 7) \times 7 = 56$

$n + 7 = 56 : 7$

$n + 7 = 8$

$n = 8 - 7$

$n = 1$

d) $n - 7 = 18$

$n = 18 + 7$

$n = 25$

e) $(n - 7) : 7 = 7$

$n - 7 = 7 \times 7$

$n - 7 = 49$

$n = 49 + 7$

$n = 56$

f) $(n - 7) \times 7 = 49$

$n - 7 = 49 : 7$

$n - 7 = 7$

$n = 7 + 7$

$n = 14$

Notă : Se folosesc proprietățile operațiilor prin care, cunoscînd rezultatul și unul din numere, se află celălalt număr.

Problema 54

a) Se vede că $n \leqslant 8$ și $p \leqslant 8$. Din $n \times p = 8$, rezultă $8 : n = p$. Făcînd pe n egal pe rînd, cu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, și 8, obținem: $n = 1$ și $p = 8$; $n = 2$ și $p = 4$; $n = 4$ și $p = 2$; $n = 8$ și $p = 1$. Calculele se pot așeza ca în tabelul:

$n \times p$	8	8	8	8	8	8	8	8	8
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$8 : n = p$	—	8	4	—	2	—	—	—	1

de unde: {(1,8), (2,4), (4,2), (8,1)}

b) Factorul $p + 3$ este egal cu numărul p găsit la întrebarea anterioară. Micșorîndu-l cu 3 obținem numărul p în cazul de față: $8 - 3 = 5$; $4 - 3 = 1$; $2 - 3 =$ imposibil; $1 - 3 =$ imposibil.

Așadar, mulțimea perechilor (n, p) este

$$\{(1,5), (2,1)\}$$

Problema 55

Observăm că: $2 < n < 9$ și $2 < p < 9$. Totodată ca să putem efectua $p - 4$, este necesar să avem $p \geqslant 4$. Așadar:

$$2 < n < 9 \text{ și } 3 < p < 9$$

Produsul factorilor $n - 3$ și $p - 4$ este 0, dacă măcar unul din acești factori este 0.

În cazul $n - 3 = 0$ avem $n = 3$, p putînd fi orice număr natural cuprins între 3 și 9 obținem perechile:

$$\{(3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8)\}.$$

Dacă avem $p - 4 = 0$, atunci $p = 4$, iar n poate fi orice număr cuprins între 2 și 9. Obținem perechile:

$$\{(3,4), (4,4), (5,4), (6,4), (7,4), (8,4)\}.$$

Cum toate perechile găsite satisfac problema, avem rezultatul final:

$$\{(3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (4,4), (5,4), (6,4), (7,4), (8,4)\}$$

Problema 56

Numărul natural căutat este element al mulțimii numerelor naturale cuprinse între 13 și 37, care se împart la 5:

$$\{15, 20, 25, 30, 35\}$$

și, în același timp, al mulțimii numerelor naturale cuprinse între 13 și 37, care se împart la 6:

$$\{18, 24, 30, 36\}$$

Cum singurul element comun al acestor mulțimi este 30, el va fi numărul căutat.

TRUSA
PENTRU PREDAREA, PE BAZĂ DE MULȚIMI, A OPERAȚIILOR CU NUMERE NATURALE LA CLASELE I–IV

CONȚINUT

— 33 de plăcuțe dreptunghiulare din placaj, de diferite dimensiuni, unele avînd aplicate diferite profiluri din placaj și trasate diverse linii colorate. Pe spatele fiecărei plăcuțe este scris un număr de ordine. Numerotarea merge doar pînă la 28, deoarece există și cîte două plăcuțe identice, care poartă același număr: 8, 9, 14, 27 și 28.

— 4 pungi de plastic, conținînd, respectiv: 100 de „discuri" negre; 30 de „triunghiuri" albastre; 30 de „pătrate" roșii; 5 „dreptunghiuri" negre

— 1 pungă de plastic, conținînd 3 clame metalice simple și 3 clame metalice duble.

— 4 rigle paralelipipedice din lemn, prevăzute la capete cu găuri și nituri și de-a lungul cărora este practicat un canal.

— 1 cutie paralelipipedică din P.F.L. cu capac rabatabil de placaj, în care sînt depozitate toate materialele enumerate mai sus.

CE SE POATE REALIZA CU PIESELE DIN TRUSĂ

a) 15 panouri, din care:

—11 panouri pentru predarea adunării și scăderii în mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

— 2 panouri pentru predarea noțiunilor de înmulțire și împărțire a numerelor naturale.

— 2 panouri pentru introducerea figurii numerice ce corespunde structurii zecimale a unei mulțimi date și folosirea ei pentru numirea și scrierea numărului de elemente al mulțimii, cînd acesta este cuprins între 9 și 1 000.

b) 4 planșete, suport pentru plăcuțele cu care se realizează cele 15 panouri sus menționate.

MODUL DE REALIZARE A PLANȘETELOR SUPORT ȘI A PANOURILOR

Pentru predarea anumitor cunoștințe din programă și manual, se caută la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU" dacă există un panou care poate fi folosit în acel scop*.

În caz afirmativ, se reține numărul acestuia și se trece la realizarea lui, procedînd astfel:

Pregătirea materialelor necesare

Din tabelul 2 se găsesc numerele plăcuțelor din care poate fi alcătuit acel panou și se scot aceste plăcuțe din cutia trusei. Tot din tabelul 2 se găsește numărul planșetei ce servește ca suport pentru plăcuțele care alcătuiesc pa-

* Formularea sintetică a destinației fiecărui panou este dată în „TABELUL 1".

noul. Se caută în tabelul 3 numerele plăcuțelor din care se asamblează planșeta, precum și riglele și clamele metalice necesare. Se scot din cutia trusei toate aceste piese.

Realizarea planșetelor

Asamblarea plăcuțelor pentru realizarea planșetelor suport este dată în figurile 1, 2, 3 și 4.

Sprijinirea acestor plăcuțe, astfel încît planșeta să stea într-un plan puțin înclinat față de verticală, se realizează cu ajutorul celor patru rigle paralelipipedice din lemn.

Pentru planșetele 1, 2 și 3:

Se îmbină riglele de aceeași lungime ca plăcuțele componente, introducînd nitul din capătul unei rigle, în orificiul din capătul alteia, așa cum ilustrează figurile 5 și 6.

În canalul riglelor astfel asamblate se introduc, pe rînd, marginea cu dimensiunea mai mare a fiecărei plăcuțe din componența planșetei, așa cum sugerează figura 7.

Așezînd riglele cu partea opusă canalului practicat în ele pe o masă obișnuită, se obține planșeta într-o poziție aproape verticală, oferind vizibilitate din clasă pentru ceea ce se va așeza pe planșetă, fără ca piesele respective să cadă, datorită înclinației existente.

Pentru asigurarea rigidității necesare pentru planșetă, plăcuțele se prind între ele la partea superioară cu cîte o clamă metalică simplă (exemplu clama (c), figura 7).

Pentru planșeta 4

După procedeul expus, se realizează asamblarea din figura 8. Drept rigle de sprijin se folosesc cele două rigle mai lungi, în care se fixează plăcuțele cu numărul 27, introduse în canalul riglelor, cu latura cea mai scurtă. Se plasează apoi cele trei clame metalice duble (d_1), (d_2) și (d_3) și în ele se introduc plăcuțele cu numerele 28, cu latura cea mai scurtă.

În partea superioară se prinde clama metalică simplă (e). Pentru asigurarea stabilității planșetei, aceasta se reazimă de cutia trusei, așezată pe fața de arie mai mică.

Realizarea panourilor

Pe planșeta suport corespunzătoare panoului respectiv, asamblată după indicațiile anterioare, se așază, alăturîndu-le una de alta, plăcuțele componente ale panoului care dorim să-l realizăm, așa cum rezultă din figurile care indică „ASAMBLAREA PLĂCUȚELOR PENTRU REALIZAREA PANOURILOR".

Așezarea se face astfel încît partea pe care este scris numărul plăcuței să vină pe planșetă.

Facem observația că punctul scris jos la dreapta fiecărui număr de ordine al plăcuțelor indică „baza" numărului. Exemple: 9. (nouă); 6. (șase); 8. (opt) etc. Acest lucru este util la așezarea plăcuțelor, deoarece, de exemplu plăcuța indicată în figură prin numărul „8." se va așeza la locul indicat în poziția normală, iar dacă în figură numărul plăcuței este scris „·8", ea va fi așezată în acel loc în poziție „răsturnată" (numărul venind cu „capul în jos").

După așezarea plăcuțelor conform indicațiilor, se compară aspectul panoului obținut, cu aspectul care „trebuia" obținut, existent în figurile care arată „ASPECTUL PANOURILOR CE POT FI REALIZATE".

CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU

Panoul nr. 1.

— Formarea reuniunii mulțimilor disjuncte.
— Comutativitatea reuniunii.
— Mulțimea diferență dintre o mulțime și o submulțime a sa.
— Legătura dintre reuniunea a două mulțimi și diferența dintre reuniune și una din ele.
— Definiția adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte.
— Efectuarea adunării a doi termeni în mulțimea numerelor naturale pînă la 10, folosind definiția adunării și numărarea.
— Comutativitatea adunării numerelor naturale; proba adunării prin adunare.

Panoul nr. 2.

Aceeași utilizare ca și a panoului 1. În plus, face posibilă evitarea numărării în scopul aflării numărului elementelor reuniunii, ducînd treptat la formarea automatismelor de efectuare a adunării în mulțimea numerelor naturale pînă la 10.

Panoul nr. 3.

— Formarea diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa.
— Necomutativitatea diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa.
— Definiția scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa.
— Efectuarea scăderii în mulțimea numerelor naturale pînă la 10, folosind definiția scăderii și numărarea.
— Legătura dintre adunare și scădere, pe baza legăturii dintre reuniunea a două mulțimi și diferența dintre reuniune și una din cele două mulțimi.
— Aflarea unui termen al adunării cînd știm suma și celălalt termen; proba adunării prin scădere.
— Aflarea unui termen al scăderii cînd știm diferența și celălalt termen; proba scăderii prin scădere și prin adunare.

Panoul nr. 4.

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor adunării:

a) Adunarea fără trecere peste ordin a:

— două numere formate numai din zeci;
— unui număr format numai din zeci cu un număr format numai din unități;
— unui număr format din zeci și unități cu un număr format numai din unități;
— două numere formate, fiecare, din zeci și unități.

b) Adunarea cu trecere peste ordin a:

— două numere ce se scriu cu cîte o cifră;

— unui număr format din zeci și unități cu un număr format numai din unități;

— două numere formate fiecare din zeci și unități.

Notă:

Panoul poate fi utilizat și în toate situațiile menționate pentru panoul nr. 1, referitor atît la mulțimea numerelor naturale pînă la 10, cît și la mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

Panoul nr. 5.

— Formarea diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, cînd mulțimea are o structură numerică zecimală, astfel încît mulțimea diferență să aibă și ea o structură numerică zecimală.

Efectuarea scăderii fără trecere peste ordin:

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor scăderii, deducerea regulilor de calcul a diferenței în cazurile:

— Două numere formate numai din zeci.

— Descăzutul format din zeci și unități și scăzătorul format numai din unități.

— Două numere, fiecare format din zeci și unități.

Notă:

Pot fi explicate și situațiile menționate la panoul nr. 3, atît pentru mulțimea numerelor naturale mai mici decît 10, cît și pentru mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

Panoul nr. 6.

Aceeași utilizare ca și a panoului nr. 5, dar permite și explicarea în cazul *scăderii cu trecere peste ordin*, dacă:

— Descăzutul este format numai din zeci, iar scăzătorul este format numai din unități.

— Descăzutul este format din zeci și unități, iar scăzătorul este format numai din unități.

— Descăzutul este format numai din zeci, iar scăzătorul este format din zeci și unități.

— Descăzutul și scăzătorul conțin, fiecare, și zeci și unități.

Panoul nr. 7.

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor, deducerea regulilor de calcul la adunarea a trei numere:

— fără trecere peste ordin;

— cu trecere peste ordin (suma numerelor reprezentate de cifrele unităților conține una sau două zeci).

Panoul nr. 8.

În mulţimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, folosind structura zecimală a termenilor, deducerea regulilor de calcul la:

Adunarea fără trecere peste ordin a:

— unui număr format numai din sute, cu un număr format din zeci şi unităţi;
— unui număr format numai din sute, cu un număr format numai din zeci;
— unui număr format numai din sute, cu un număr format numai din unităţi;
— două numere formate numai din sute;
— două numere formate, fiecare, din sute, zeci şi unităţi;
— două numere, din care cel puţin unul se scrie cu trei cifre;
— două numere în situaţia anterioară, în cazul în care unul, sau amîndouă, conţin unul sau două zerouri.

Adunarea cu trecere peste ordin a:

— două numere formate, fiecare, din sute, zeci şi unităţi;
— două numere din care cel puţin unul este scris cu trei cifre;
— două numere în situaţia anterioară, în cazul în care unul, sau amîndouă, conţin cîte un zero.

Notă:
Pot fi explicate şi situaţiile menţionate la panourile 1 şi 4, lucrînd în oricare din mulţimea numerelor naturale mai mici decît 10, mai mici decît 100 sau mai mici decît 1 000.

Panoul nr. 9.

Aceeaşi utilizare ca şi a panoului nr. 5, dar poate fi folosit şi în legătură cu mulţimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, la:

Scăderea fără trecere peste ordin:

— a două numere formate numai din sute;
— a două numere formate, fiecare, din sute, zeci şi unităţi;
— descăzutul este scris cu trei cifre diferite de 0, iar scăzătorul este scris cu una sau două cifre diferite de 0;
— descăzutul este scris cu trei cifre, scăzătorul este scris cu una, două sau trei cifre, în cazul în care unul, sau amîndoi termenii scăderii, conţin în scrierea lor unul sau două zerouri.

Panoul nr. 10.

Aceeaşi utilizare ca a panoului nr. 9, dar permite explicarea şi în cazul în care avem:

Scăderea cu trecere peste ordin:

Descăzutul este scris cu trei cifre şi:
— cifra unităţilor la scăzător arată un număr mai mare decît cea de la descăzut;

— cifra zecilor scăzătorului arată un număr mai mare decît cea de la descăzut;

— cifra unităților la scăzător arată un număr mai mare decît cea de la descăzut, iar cifra zecilor scăzătorului arată un număr care nu este mai mic decît cel arătat de cifra zecilor descăzutului;

— cifra unităților la scăzător arată un număr mai mare decît cea de la descăzut, cifra zecilor descăzutului fiind 0.

Panoul nr. 11.

Aceeași utilizare ca a panoului 7, dar permite explicarea și în mulțimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, pentru:

a) Adunarea a trei numere, fără trecere peste ordin.

b) Adunarea a trei numere, cu trecere peste ordin, cînd:

— suma numerelor indicate de cifrele unităților conține una sau două zeci;

— suma numerelor indicate de cifrele zecilor conține una sau două sute;

— se întîlnesc simultan cele două situații de mai sus.

Panoul nr. 12.

— Organizarea unei mulțimi, avînd pînă la 100 de elemente, cu structură numerică zecimală.

— Sugerarea ideii de a reprezenta fiecare submulțime de cîte zece elemente din organizarea anterioară, printr-un simbol (o piesă triunghiulară albastră).

— Introducerea convenției de numire a numerelor naturale mai mari decît zece, dar cel mult egale cu o sută.

— Înmulțirea a două numere naturale cel mult egale cu 10:

a) folosind mulțimea produs; b) folosind adunarea repetată.

— Împărțirea prin cuprindere și împărțirea în părți egale, în cazul în care împărțitorul și cîtul nu sînt mai mari decît 10:

a) cu ajutorul submulțimilor disjuncte; b) cu ajutorul scăderii repetate.

— Legătura dintre înmulțire și împărțire.

Panoul nr. 13.

— Organizarea unei mulțimi, avînd pînă la 25 de elemente, cu structură numerică în baza cinci.

— Sugerarea ideii de a reprezenta fiecare submulțime de cîte cinci elemente din organizarea anterioară, printr-un simbol (o piesă triunghiulară albastră).

— Înmulțirea a două numere naturale cel mult egale cu 5:

a) folosind mulțimea produs; b) folosind adunarea repetată.

— Împărțirea prin cuprindere și împărțirea în părți egale, în cazul în care împărțitorul și cîtul nu sînt mai mari decît 5:

a) cu ajutorul submulțimilor disjuncte; b) cu ajutorul scăderii repetate.

— Legătura dintre înmulțire și împărțire.

Panoul nr. 14.

— Introducerea figurii numerice zecimale corespunzătoare structurii zecimale a unei mulțimi cu mai puțin ca 100 de elemente, evidențiate pe panoul 12.

— Scrierea numerelor naturale mai mari ca 9 dar mai mici decît 100.

— Unităţi de ordinul întîi. Cifra unităţilor din scrierea unui număr. Unităţi de ordinul al doilea. Cifra zecilor din scrierea unui număr.

Panoul nr. 15.

— Introducerea figurii numerice zecimale corespunzătoare structurii zecimale a unei mulţimi cu mai puţin de 1 000 de elemente.

— Convenţia de numire a numerelor mai mari decît o sută dar mai mici decît o mie.

— Scrierea numerelor mai mari decît 99, dar mai mici decît 1 000.

— Unităţi de ordinul al treilea. Cifra sutelor în scrierea unui număr.

MODUL DE FOLOSIRE A PANOURILOR

În esenţă, panourile servesc la alcătuirea unor figuri numerice, ca mulţimi model cu structură numerică zecimală pentru numerele cu care avem a face diferite operaţii. Acestea vor permite folosirea cu o mare eficienţă a intuiţiei în studiul numerelor naturale şi a operaţiilor cu ele, crescînd posibilitatea înţelegerii prin „vizualizarea" conţinutului explicat.

Figurile numerice se obţin prin plasarea pe panouri, sprijinite pe rigluţele lipite ca profiluri pe plăcuţele panoului, a discurilor negre, triunghiurilor albastre şi pătratelor roşii, aflate în cîte o pungă de plastic. (Nu este bine să fie amestecate în aceeaşi pungă, ceea ce creează greutăţi în căutarea piesei potrivite în timpul folosirii panoului).

Fiecare disc negru constituie un element al mulţimii model; fiecare triunghi albastru reprezintă o mulţime de zece discuri negre ale mulţimii model; fiecare pătrat roşu reprezintă o sută de discuri negre ale mulţimii model, sau zece triunghiuri albastre ale figurii numerice, respectiv zece zeci.

Aşadar, mulţimea model folosită este o mulţime de discuri negre. Triunghiurile albastre şi pătratele roşii servesc pentru a sugera structura numerică zecimală a mulţimii model. În afara figurilor numerice, triunghiurile şi pătratele îşi pierd această semnificaţie, putînd fi utilizate ca obiecte obişnuite.

Dreptunghiurile negre servesc pentru a scrie pe ele cu cretă numerele ce corespund figurilor numerice realizate pe panouri, urmînd a fi plasate în dreptul săgeţilor indicatoare existente, în care scop panourile sînt prevăzute în acele locuri cu profiluri de sprijin, realizate din rigluţe de placaj.

Modul în care se foloseşte fiecare panou la predarea diverselor cunoştinţe, a căror însuşire este optimizată prin utilizarea panoului respectiv, rezultă din conţinutul manualului „Matematică manual pentru clasa a II-a", ediţia 1979, autori D. Roşca, V. Ţifui şi L. Mandric, precum şi din conţinutul lucrării „Matematică clasa a II-a — îndrumătorul învăţătorului", ediţia 1979, autor D. Roşca.

Excepţie fac panourile 1, 2, 3 şi 10, a căror utilizare nu este de loc explicată în lucrările menţionate, deoarece 1, 2 şi 3 sînt destinate mai ales utilizării lor în clasa I (chiar şi la grădiniţă), iar 10 este în legătură cu programa clasei a III-a.

Întrebuinţarea panourilor 8 şi 11 nu a fost explicată şi pentru cazul adunării cu trecere peste ordin, aceasta intrînd în programa clasei a III-a. De asemenea, lămuririle existente în legătură cu utilizarea panourilor 12, 13, 14 şi 15 sînt foarte sumare.

Din exemplele prezentate în continuare, completate cu conţinutul cărţilor amintite, se va deduce suficient de clar, sperăm, tehnica utilizării tuturor

panourilor trusei și pentru toate situațiile enumerate la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU".

Atragem atenția că prezenta trusă nu este un dispozitiv de calculat (de tipul sorobanului japonez de pildă), ci unul destinat explicării definițiilor operațiilor, deducerii unor reguli și tehnici de calcul etc. În esență, este un mijloc de învățare. În consecință, utilizarea trusei nu urmărește să facă economie de timp în găsirea rezultatelor unor operații, ci în înțelegerea unor idei și tehnici de lucru, urmărește să adîncească această înțelegere. De aceea nu are sens a urmări formarea la elevi a deprinderilor de mînuire rapidă a trusei, ci a abilității de a o folosi pentru descifrarea unor situații noi, pe baza cunoștințelor anterioare și a orientării gîndirii prin intermediul imaginilor vizuale adecvate situațiilor analizate.

Lucrul cu trusa este indicat numai pînă ce elevii înțeleg esența unor probleme legate de structura zecimală a mulțimii, numirea și scrierea numerelor cu ajutorul figurilor numerice, definiția fiecărei operații și cum se ajunge la una sau alta din regulile de calcul.

După deducerea acestor reguli, folosirea ei nu mai este justificată, în afară de cazurile în care se constată că se mențin sau apar confuzii în legătură cu noțiunile sau regulile respective, la unii elevi.

EXEMPLE DE FOLOSIRE A TRUSEI

Exemplul 1

Organizarea unei mulțimi avînd pînă la 100 de elemente, cu structură numerică zecimală. Numirea și scrierea numărului de elemente al mulțimii.

Se caută în „TABELUL 1", dacă există vreun panou care ar putea fi folosit în acest scop. Se pare că ar corespunde panourile 12 și 14. Citim la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU", cele menționate la panourile 12 și 14. Ne convingem că, în adevăr, panourile 12 și 14 pot fi folosite în scopul urmărit.

Ne uităm în „TABELUL 2" și găsim că pentru realizarea panoului 12 avem nevoie de plăcuțele 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 și 26, iar pentru panoul 14 avem nevoie de plăcuțele 3 și 9. Scoatem aceste plăcuțe din trusă.

Din același tabel rezultă că panoul 12 se realizează pe planșeta suport nr. 4, iar panoul 14 se realizează pe planșeta suport nr. 1. În „TABELUL 3" vedem că pentru realizarea planșetei suport 4 avem nevoie de: două plăcuțe cu numărul 27, două plăcuțe cu nr. 28, cele două rigle mai lungi, o clamă metalică simplă, 3 clame metalice duble. (Tot din „TABELUL 3" vedem cele necesare planșetei 1 și constatăm că intră și în componența planșetei 4. Așadar, planșetele 1 și 4 nu vor putea fi realizate simultan.) Scoatem din trusă toate aceste piese.

Realizăm planșeta suport nr. 4 și panoul nr. 12 (figurile 4, 8, 20 și 35), după procedeul descris la „MODUL DE REALIZARE A PLANȘETELOR SUPORT ȘI A PANOURILOR". Înainte de amplasarea cutiei trusei ca suport pentru planșeta nr. 4, scoatem din trusă pungile de plastic, conținînd discurile negre și dreptunghiurile albastre.

Modul de utilizare a panoului 12 pentru explicarea temei anunțate este, pe scurt, următorul:

Se iau din punga de plastic conținînd discurile negre, o mulțime oarecare de discuri.

1) Se numără tot cîte zece discuri din mulțimea aleasă, completînd cu ele, concomitent cu numărarea, cîte o submulțime avînd zece locuri (căsuțe), din cele indicate pe panoul 12.

Alegînd exemplele în mod potrivit, se va pune în evidență că pînă la epuizarea discurilor din mulțimea inițială, se pot ivi alternativele:

a) Rămîn discuri cu care nu mai putem completa o nouă mulțime de zece discuri.

b) Nu rămîn discuri în afara submulțimilor de cîte zece discuri.

Pe panoul 12 se obțin aspecte de felul figurii 39, care reprezintă organizarea mulțimii discurilor luate din punga de plastic, cu structură numerică zecimală.

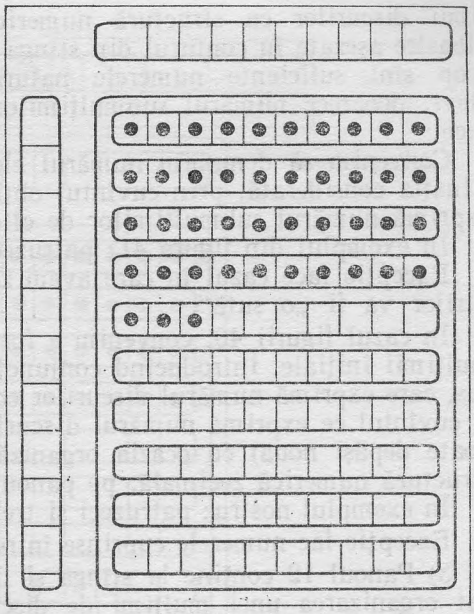


Fig. 39.T

2) Indicăm fiecare submulțime de cîte zece discuri de pe panoul 12, printr-un triunghi albastru așezat în stînga submulțimii respective, și fiecare disc din cele cu care nu am putut completa o submulțime de zece discuri, printr-un disc negru așezat în conturul de deasupra mulțimii inițiale, cum arată figura 40.

Alegînd mulțimi de discuri care să ne conducă la situația (b) de mai sus (fig. 41), numărăm submulțimile de cîte zece discuri din organizarea mul-

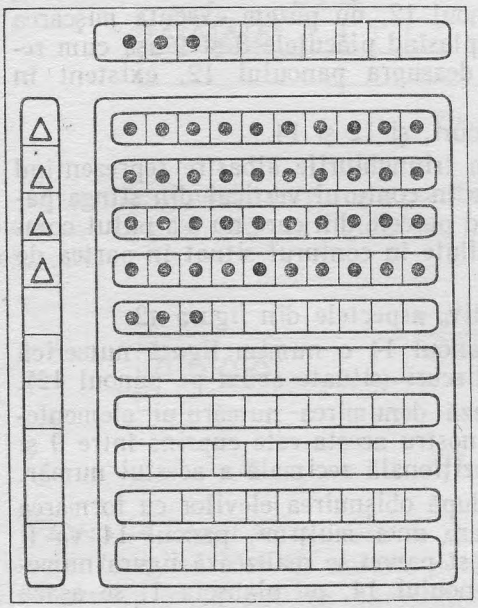


Fig. 40.T

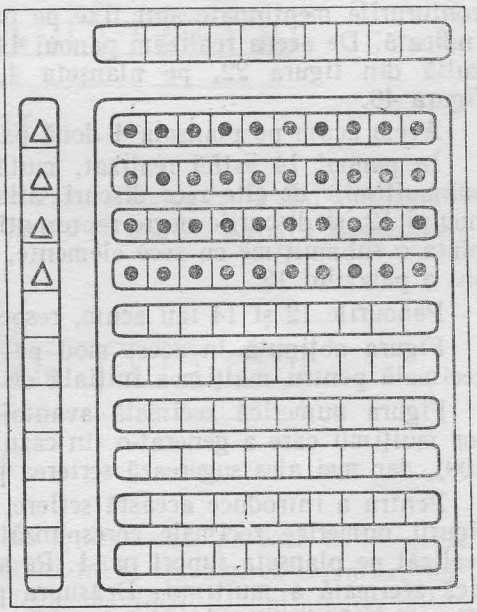


Fig. 41.T

ţimii discurilor cu structură numerică zecimală, numărînd triunghiurile albastre aşezate în conturul din stînga pe panoul 12. Se observă că în acest scop sînt suficiente numerele naturale pînă la zece, învăţate deja de elevi, deoarece numărul submulţimilor formate pe panou nu poate depăşi zece.

Convenim să denumim numărul elementelor mulţimii iniţiale aflate în situaţia considerată, prin cuvîntul obţinut alipind la dreapta cuvîntului ce exprimă numărul submulţimilor de cîte zece, cuvîntul „zeci".

În exemplul din figura 41: patruzeci

Excepţie face cazul în care avem zece zeci, cînd numele numărului discurilor va fi „o sută".

În cazul figurii 40, convenim a forma denumirea numărului elementelor mulţimii iniţiale, introducînd conjuncţia „şi" între cuvîntul format ca mai sus, care exprimă numărul discurilor conţinute în submulţimile de cîte zece, şi cuvîntul ce exprimă numărul discurilor rămase în afara acestora (care nu poate depăşi nouă) cu ocazia organizării mulţimii iniţiale a discurilor cu structură numerică zecimală, pe panoul 12.

În exemplul nostru: patruzeci şi trei.

Excepţie fac numerele cuprinse între zece şi douăzeci.

3) Panoul 12 conţine la stînga şi deasupra conturului în care am realizat organizarea unei mulţimi de discuri cu structură numerică zecimală, cîte un contur în care am aşezat, respectiv, triunghiuri albastre şi discuri negre (fig. 40).

Din convenţia introdusă asupra denumirii numărului elementelor unei mulţimi date se vede că acest număr este perfect determinat dacă se cunoaşte aspectul acestor două contururi, cel din stînga şi cel de sus din panoul 12.

Dacă am roti convenabil cu 90° conturul vertical din stînga, alăturîndu-l orizontal şi la stînga celui de sus, am obţine aspectul din panoul 14. Cum contururile menţionate sînt fixe pe panoul 12, nu putem executa mişcarea indicată. De aceea realizăm panoul 14 plasînd plăcuţele 3 şi 9 aşa cum rezultă din figura 22, pe planşeta 4, deasupra panoului 12, existent în figura 40.

Avem acum pe planşeta 4 două panouri, şi 12 şi 14.

În panoul 14 astfel realizat, mutăm triunghiurile albastre reprezentînd submulţimile de cîte zece discuri, aflate în conturul vertical din stînga panoului 12, şi discurile negre reprezentînd pe cele din care nu s-a putut completa o submulţime cu zece elemente, aflate în conturul situat în partea de sus a panoului 12.

Panourile 12 şi 14 iau acum, respectiv, aspectele din figura 42.

Figura obţinută în acest mod pe panoul 14 o numim figură numerică zecimală pentru mulţimea iniţială de discuri (situate acum pe panoul 12).

Figura numerică zecimală avantajează denumirea numărului elementelor mulţimii care a generat-o (în cazul nostru acesta este cuprins între 9 şi 100), dar mai ales sugerează scrierea poziţională zecimală a acestui număr.

Pentru a introduce această scriere, după obişnuirea elevilor cu formarea figurii numerice zecimale corespunzătoare unei mulţimi, panoul 14 va fi realizat pe planşeta suport nr. 1. Pe acest panou se realizează figura numerică zecimală a mulţimii. Deasupra panoului 14, pe planşeta 1, se aşază cîte o piesă dreptunghiulară neagră pe care s-a scris cu cretă numărul de triunghiuri albastre, respectiv numărul de discuri negre existente în figura 43.

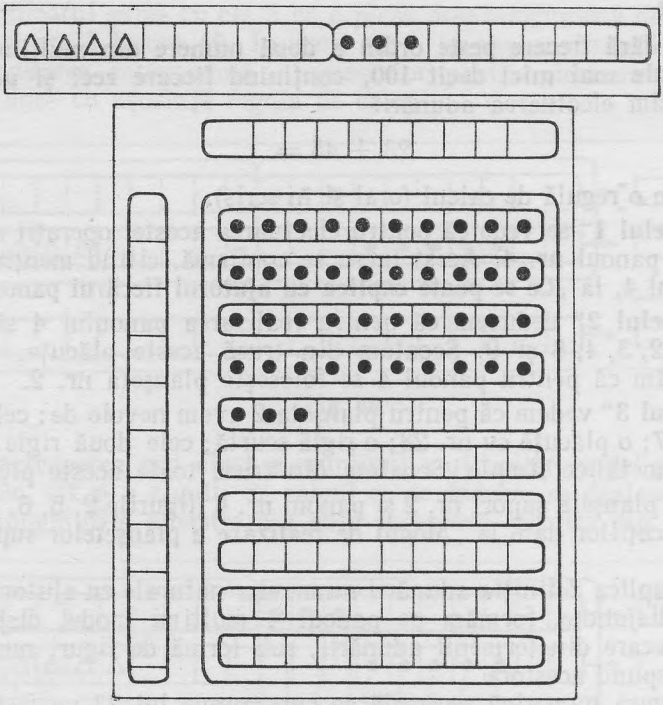


Fig. 42.T

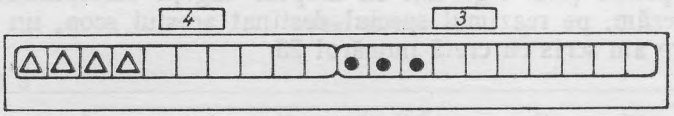


Fig. 43.T

Piesele dreptunghiulare negre purtînd cifrele scrise cu cretă sînt apoi apropiate aşa cum se vede în figura 44, în care a şi apărut scrierea numărului respectiv.

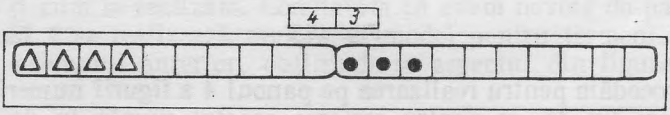


Fig. 44.T

Panoul 14 folosit în maniera de mai sus optimizează, pe bază de imagini vizuale: formarea ideii de unitate de ordinul întîi; înţelegerea semnificaţiei cifrei unităţilor în scrierea numărului; formarea ideii de unitate de ordinul al doilea; înţelegerea semnificaţiei cifrei zecilor în scrierea numărului; înţelegerea principiului scrierii poziţionale în sistemul zecimal de numeraţie.

Exemplul 2

Adunarea fără trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să explicăm efectuarea adunării

$$23 + 45 =$$

și să deducem o regulă de calcul (oral și în scris).

Din „**Tabelul 1**" se vede că pentru efectuarea acestei operații ar fi posibil să servească panoul nr. 4. Acest lucru se confirmă, citind mențiunile făcute pentru panoul 4, la „**Ce se poate explica cu ajutorul fiecărui panou**".

Din „**Tabelul 2**" deducem că pentru realizarea panoului 4 sînt necesare plăcuțele 1, 2, 3, 4, 8 și 9. Scoatem din trusă aceste plăcuțe. Din același tabel observăm că pentru panoul 4 se folosește planșeta nr. 2.

În „**Tabelul 3**" vedem că pentru planșeta 2 avem nevoie de: cele două plăcuțe cu nr. 27; o plăcuță cu nr. 28; o riglă scurtă; cele două rigle mai lungi; două clame metalice simple. Scoatem din trusă toate aceste piese.

Realizăm planșeta suport nr. 2 și panoul nr. 4 (figurile 2, 5, 6, 7, 12 și 27), conform indicațiilor date la „**Modul de realizare a planșetelor suport și a panourilor**".

Pentru a aplica definiția adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte, formăm pe panoul 4 mulțimi model disjuncte între ele pentru fiecare din termenii adunării, sub formă de figuri numerice zecimale ce corespund acestora.

Astfel, figura numerică zecimală ce corespunde lui 23 va fi formată din 2 triunghiuri albastre reprezentînd zeci (mulțimi de cîte zece discuri negre) și 3 discuri negre reprezentînd unități (adică discurile însăși), plasate la locul potrivit pe panou (vezi fig. 45). În dreptul săgeții corespunzătoare de pe panoul 4 așezăm, pe reazimul special destinat acestui scop, un dreptunghi negru pe care am scris cu cretă numărul 23

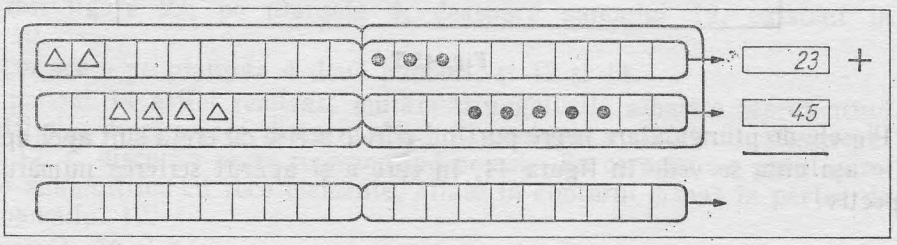


Fig. 45.T

Analog procedăm pentru realizarea pe panoul 4 a figurii numerice zecimale corespunzătoare lui 45, și pentru scrierea acestui număr în dreptul figurii respective.

Rezultatul adunării celor două numere va fi numărul elementelor reuniunii celor două mulțimi model folosite pentru termeni. Reuniunea respectivă este pusă în evidență de conturul (linia închisă) ce înconjură cele două contururi reprezentînd mulțimile model pentru termeni.

Se vede că reuniunea este o mulțime gata organizată cu structură numerică zecimală. Ea are numărul unităților, respectiv al zecilor, egal cu suma numerelor unităților, respectiv a zecilor, existente la fiecare din numerele termeni.

Scriem numărul sumă cu cretă pe o piesă dreptunghiulară neagră și o așezăm așa cum arată figura 46. În acest mod, în partea dreaptă a panoului 4 se obține așezarea convenabilă a numerelor pentru efectuarea adunării în scris. Se deduce cu ușurință regula de calcul.

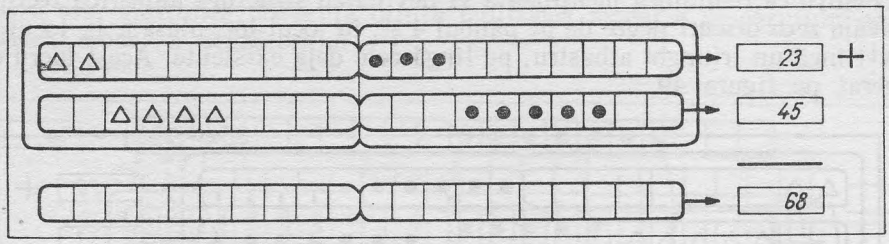


Fig. 46.T

Pentru perceperea mai clară a reuniunii mulțimilor model și a structurii sale zecimale, cît și a regulii de calcul ce se deduce, se deplasează discurile negre și triunghiurile albastre așa cum sugerează săgețile din figura 47.

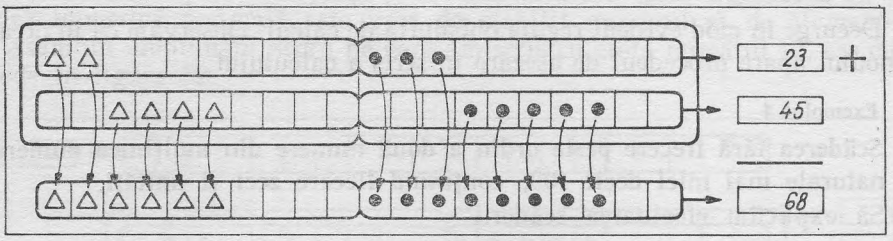


Fig. 47.T

Exemplul 3

Adunarea cu trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să explicăm efectuarea adunării

$$26 + 57 =$$

și să deducem o regulă de calcul.

Din cele relatate pînă acum se vede cum găsim panoul și planșeta corespunzătoare și cum le realizăm. Constatăm că avem nevoie de panoul 4.

Pe panoul 4 se realizează mulțimile model pentru termeni, așa cum s-a făcut și la exemplul anterior, obținîndu-se aspectul din figura 48.

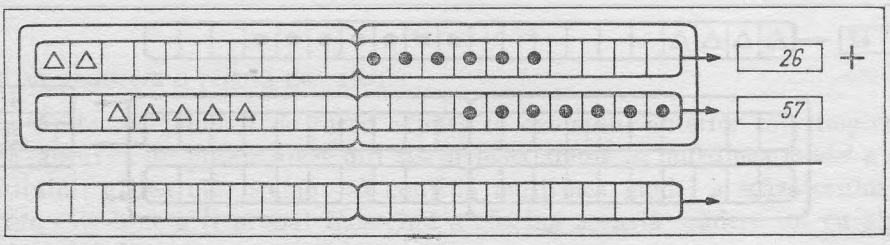


Fig. 48.T

De data aceasta însă, reuniunea mulțimilor model ale termenilor nu apare cu structură numerică zecimală, deoarece din discurile pe care le conține în afara submulțimilor de cîte zece, reprezentate prin triunghiuri albastre, mai poate fi completată încă o astfel de submulțime.

Pentru ca reuniunea menționată să devină cu structură numerică zecimală ridicăm zece discuri negre de pe panoul 4 și, în locul lor, plasăm la locul potrivit încă un triunghi albastru, pe lîngă cele deja existente. Acest lucru este sugerat pe figura 49.

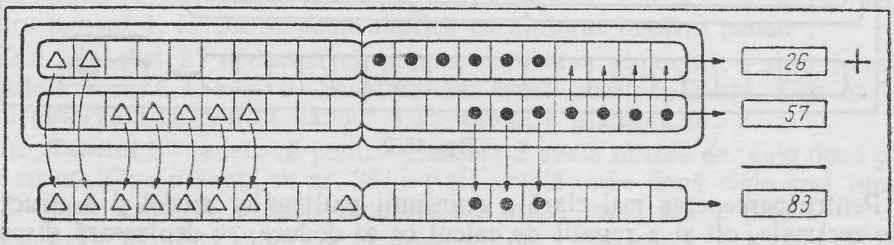


Fig. 49.T

Decurge în mod evident regula obișnuită de calcul. Observăm că în dreapta panoului apare procedeul de așezare în scris a calculului.

Exemplul 4

Scăderea fără trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să explicăm efectuarea scăderii

$$47 - 35 =$$

și să deducem o regulă de calcul (oral și scris).

Se găsește ușor că putem folosi panoul nr. 5, realizat pe planșeta nr. 2, pe care le executăm după recomandările anterioare.

Pentru a explica definiția scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, formăm pe panoul 5 o mulțime model pentru descăzutul 47, sub formă de figură numerică zecimală (fig. 50). În stînga acestei figuri, în direcția săgeții existente, așezăm pe reazimul special destinat acestui scop un dreptunghi negru din punga de plastic, pe care am scris cu creta numărul 47. Alte două dreptunghiuri negre pe care am scris cu creta, respectiv 47 și 35, le așezăm în dreapta panoului 5, cum se vede de asemenea în figura 50.

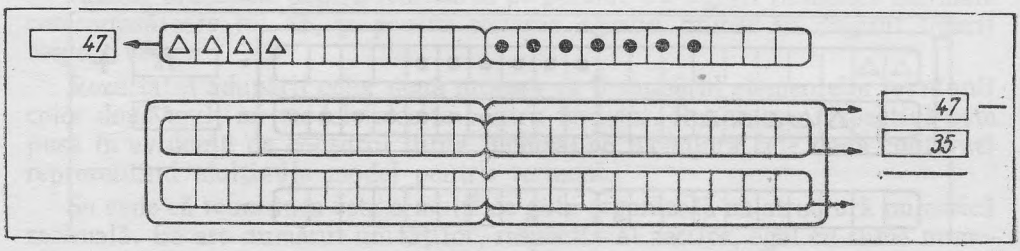


Fig. 50.T

Deplasînd discurile și triunghiurile aflate pe panoul 5 așa cum indică săgeţile din figura 51, obţinem separarea mulţimii model a descăzutului în două submulţimi disjuncte, din care una este mulţime model pentru scăzătorul 35 (piesele care o formează le mișcăm mai întîi); cealaltă submulţime este mulţimea diferenţă dintre mulţimea model a descăzutului și mulţimea model a scăzătorului.

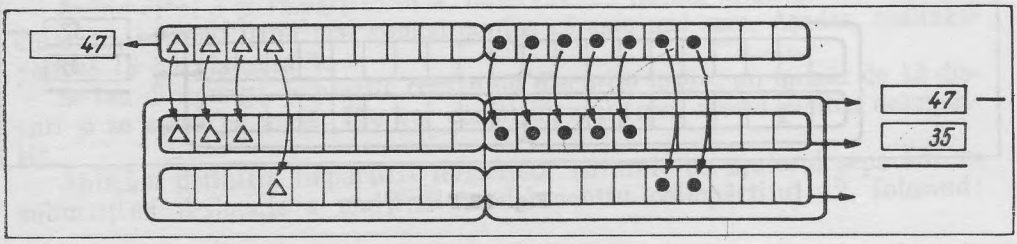


Fig. 51.T

Întrucît mulţimea diferenţă astfel obţinută este gata organizată cu structură numerică zecimală este ușor de stabilit numărul ei de elemente, 12. Plasăm un dreptunghi negru pe care am scris cu creta numărul 12, așa cum se vede în figura 52.

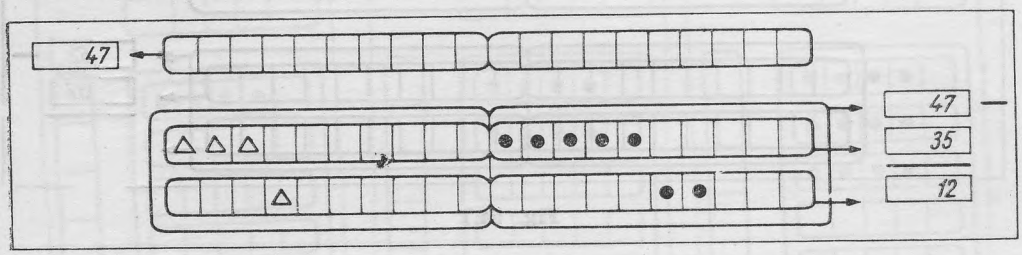


Fig. 52.T

Din modul de lucru expus mai sus rezultă clar regula de calcul. În partea dreaptă a panoului apare modul de așezare a calculului în scris.

Exemplul 5

Scăderea cu trecere peste ordin a două numere din mulţimea numerelor naturale mai mici decît 100, conţinînd fiecare zeci și unităţi.

Să efectuăm scăderea

$$52 - 37 =$$

și să deducem o regulă de calcul.

Aplicarea tehnicii de lucru expusă la exemplul anterior este împiedicată de faptul că nu putem alege din discurile existente în mulţimea model a descăzutului, atîtea cîte trebuie să conţină mulţimea model a scăzătorului (fapt care este bine a fi probat încercînd a efectua această scădere tot cu ajutorul panoului 5).

Panoul 6 executat pe planșeta 2 rezolvă această situaţie.

Realizăm pe panoul 6 mulțimea model pentru descăzutul 52, așa cum arată figura 53. Pentru a depăși dificultatea menționată, luăm un triunghi albastru

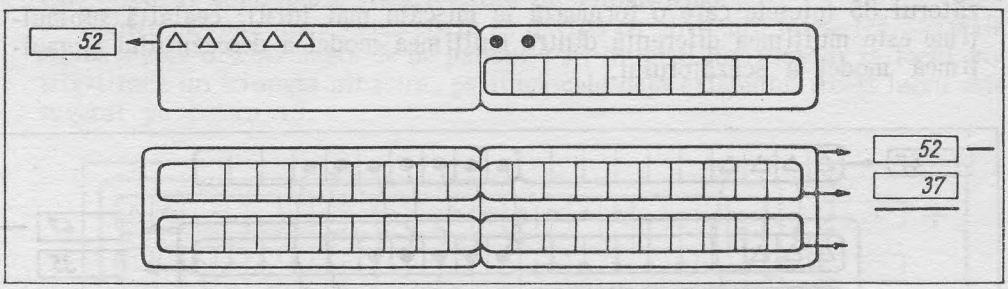


Fig. 53.T

din cele existente în figura numerică a descăzutului și punem în schimb pe panou zece discuri negre, cum indică figura 54.

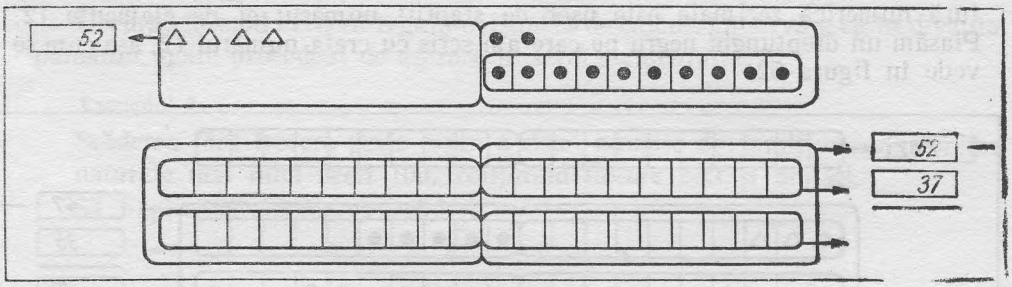


Fig. 54.T

Pentru efectuarea scăderii se procedează în continuare ca la exemplul 4, ceea ce rezultă și din figura 55.

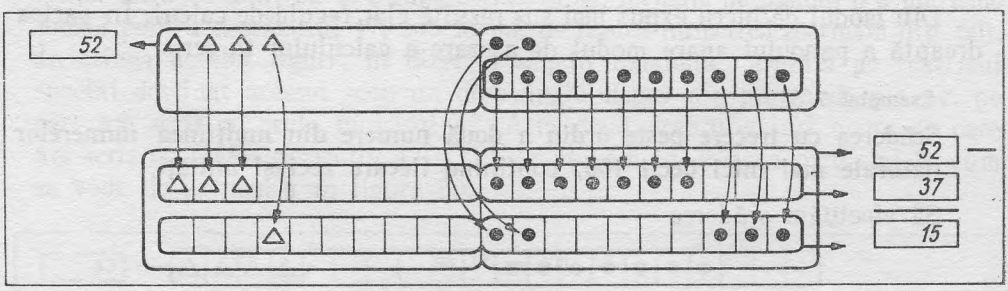


Fig. 55.T

Se deduce regula: se scad unitățile de la scăzător dintr-o zece a descăzutului; restul obținut, adunat cu unitățile descăzutului, dă numărul de unități al diferenței; numărul zecilor diferenței se obține scăzînd numărul zecilor scăzătorului din cele rămase la descăzut, după luarea zecii menționate mai sus.

În dreapta panoului se obține așezarea în scris a calculului.

Exemplul 6

Împărțirea numerelor naturale în cazul în care împărțitorul și cîtul nu sînt mai mari decît 10. Procedeul prin „cuprindere" și procedeul prin „părți egale".

Să efectuăm împărțirea:

$$12 : 4 =$$

Avînd cîtul 3 și împărțitorul 4, observăm că putem folosi panoul 12, sau chiar 13, ultimul fiind mai comod pentru că este mai mic. Așadar, realizăm panoul 13 pe planșeta 4.

Se iau din punga de plastic conținînd discurile negre, un număr de 12 discuri și se așază pe masă. Ele vor constitui mulțimea model pentru deîmpărțit.

Aplicăm definiția împărțirii numerelor naturale cu ajutorul separării în submulțimi disjuncte a mulțimii model pentru deîmpărțitul 12, folosind:

a) Procedeul prin „cuprindere":

Luăm de pe masă cîte un disc și îl așezăm ca element al unei submulțimi din cele figurate pe panoul 13, pînă completăm acesteia 4 discuri (fig. 56). Continuăm așezarea, după același procedeu, a cîte 4 discuri în celelalte **sub-**

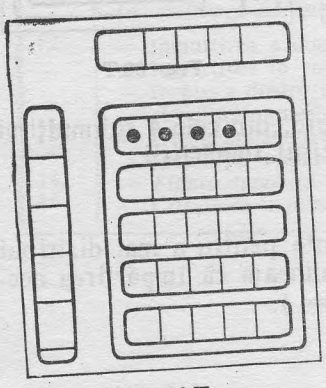


Fig. 56.T

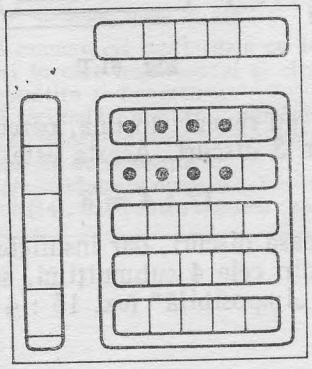


Fig. 57.T

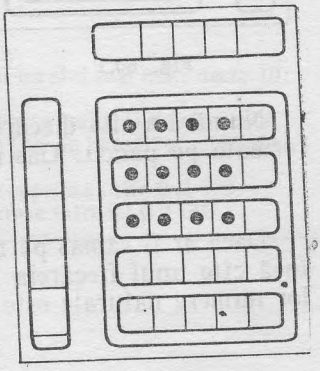


Fig. 58.T

mulțimi figurate pe panoul 13, pînă se termină discurile de pe masă (figurile 57 și 58).

Numărăm cîte submulțimi de cîte 4 elemente s-au obținut pe panoul 13, din mulțimea model a deîmpărțitului 12. Găsim 3 submulțimi. Acesta este cîtul împărțirii:

$$12 : 4 = 3$$

Numărarea submulțimilor se poate face și plasînd pe panou cîte o piesă, să zicem un triunghi albastru, pentru fiecare submulțime formată, cum se vede în figura 59, și numărînd apoi aceste triunghiuri.

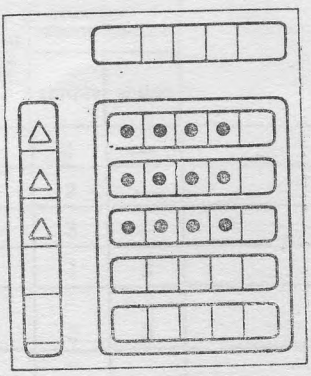


Fig. 59.T

Observație. Dacă rămîneau pe masă discuri cu care nu mai puteam completa o nouă

submulțime cu 4 elemente, împărțirea acelor numere naturale ar fi fost „imposibilă“ (ex. 15 : 4 =).

b) Procedeul prin „părți egale“.

Alegem 4 contururi de submulțimi din cele figurate pe panoul 13.

Din cele 12 discuri de pe masă distribuim, pe rînd, cîte unul în fiecare din cele 4 contururi alese, ca în figura 60. Din discurile rămase pe masă mai distribuim cîte unul în fiecare din cele 4 contururi alese pe panoul 13, și așa mai departe, pînă se termină discurile de pe masă (figurile 61 și 62).

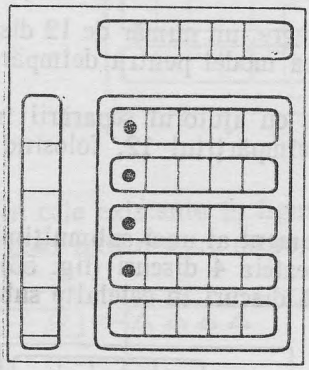


Fig. 60.T

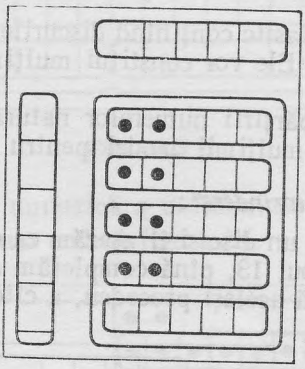


Fig. 61.T

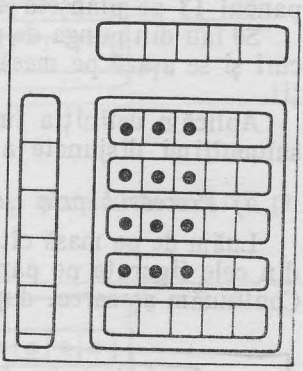


Fig. 62.T

Numărăm cîte discuri au revenit în una, oarecare, din cele 4 submulțimi formate pe panou. Găsim 3 discuri. Acesta este cîtul împărțirii.

$$12 : 4 = 3$$

Dacă ar fi rămas pe masă discuri, dar insuficiente pentru a mai distribui încă cîte unul fiecăreia din cele 4 submulțimi, spuneam că împărțirea acelor numere naturale este „imposibilă“ (ex. 15 : 4 =).

Tabelul 1

Destinația panourilor ce pot fi realizate

Panoul nr.	Utilizarea lui la :
	În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 10:
1.	— adunarea a două numere;
2.	— adunarea a două numere, cu găsirea sumei fără numărare;
3.	— scăderea a două numere.
	În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100:
4.	— adunarea a două numere, fără și cu trecere peste ordin;
5.	— scăderea a două numere, fără trecere peste ordin;
6.	— scăderea a două numere, cu trecere peste ordin;
7.	— adunarea a trei numere, fără și cu trecere peste ordin.
	În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 1 000:
8.	— adunarea a două numere, fără și cu trecere peste ordin;
9.	— scăderea a două numere, fără trecere peste ordin;
10.	— scăderea a două numere, cu trecere peste ordin;
11.	— adunarea a trei numere, fără și cu trecere peste ordin.
	În mulțimea numerelor naturale pînă la 100:
12.	— înmulțirea a două numere cel mult egale cu 10; — împărțirea în cazul în care împărțitorul și cîtul nu sînt mai mari decît 10; — legătura dintre înmulțire și împărțire; — structura numerică zecimală a mulțimii, numirea numărului ei de elemente;
13.	— citește la panoul (12), înlocuind 10 cu 5 „zecimală" cu „în baza 5" și suprimînd „numirea numărului ei de elemente".
14.	— *Figura numerică* care conduce la numere naturale cuprinse între 9 și 100.
15.	— Citește ca la panoul (14), dar pentru numere cuprinse între 99 și 1 000.

Tabelul 3

Alcătuirea planșetelor suport din plăcile componente

Plăci, rigle, clame / Planșeta nr.	Numărul plăcii		Numărul de plăci folosite	rigle		Numărul de rigle folosite	Numărul de clame folosite		
	27	28		scurte	lungi		simple	duble	
1	●●	—	2	—	2	2	1	—	
2	●●	●	3	1	2	3	2	—	
3	●●	●●	4	2	2	4	3	—	
4	●●	●●	4	—	2	2	1	3	
Existente în trusă bucăți	2	2	—	2	2	—	3	3	
La cîte planșete folosește	4	3	—	3	3	—	4	1	

Alcătuirea panourilor din plăci componente

Nr. panoului / Nr. plăcii	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	La cîte panouri folosește	Numărul de plăci existent în trusă	
1.	●	●		●				●								4	1	
2.	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●					11	1	
3.	●	●	●	●	●		●	●	●		●			●	●	11	1	
4,	●	●		●				●								4	1	
5.		●														1	1	
6.			●		●				●							3	1	
7.			●		●				●							3	1	
8.				●	●	●	●	●●	●	●●	●●					8	2	
9.				●	●		●	●●	●		●●			●	●●	8	2	
10.						●				●						2	1	
11.						●				●						2	1	
12.						●				●						2	1	
13.						●				●						2	1	
14.							●				●●					2	2	
15.							●				●					2	1	
16.							●				●					2	1	
17.							●				●					2	1	
18.										●						1	1	
19.												●	●			2	1	
20.												●	●			2	1	
21.												●	●			2	1	
22.												●	●			2	1	
23.												●				1	1	
24.												●				1	1	
25.												●				1	1	
26.												●				1	1	
Numărul de plăci folosite	4	5	4	6	6	6	8	8	6	8	11	8	4	2	3	—	29	
Nr. planșetei pe care se realizează	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	1	2	—	—	

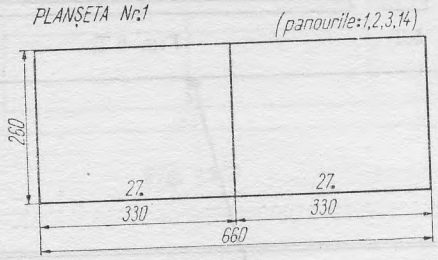


Fig. 1.T

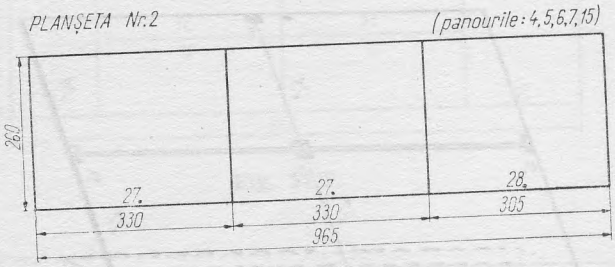


Fig. 2.T

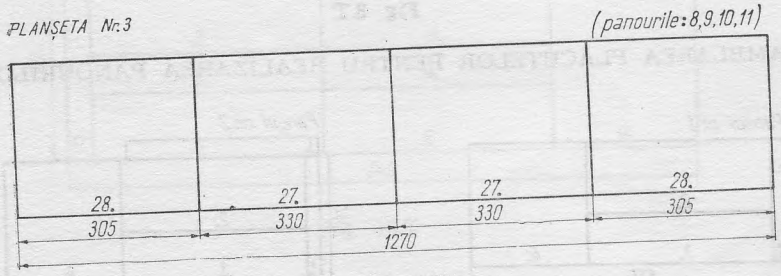


Fig. 3.T

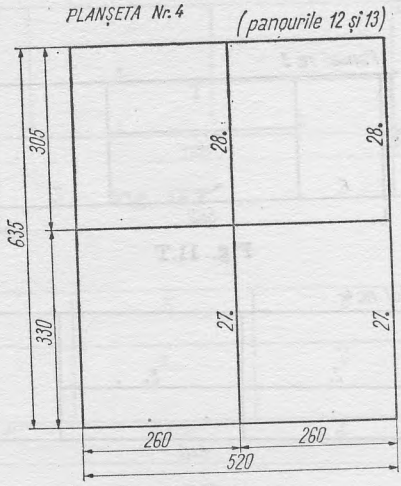


Fig. 4.T

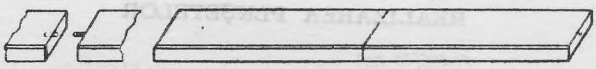


Fig. 5.T

Fig. 6.T

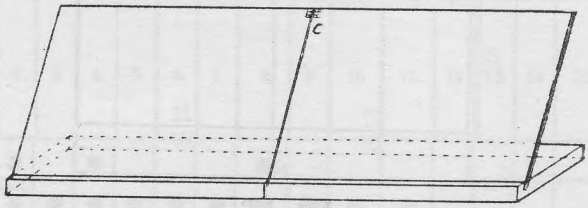


Fig. 7.T

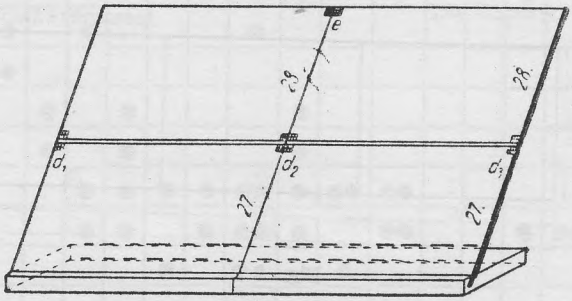


Fig. 8.T

ASAMBLAREA PLĂCUȚELOR PENTRU REALIZAREA PANOURILOR

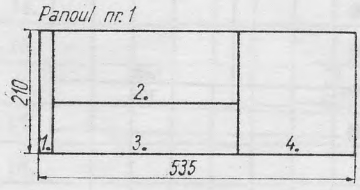


Fig. 9.T

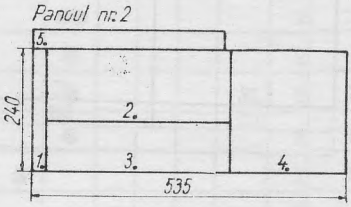


Fig. 10.T

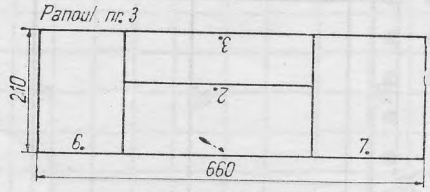


Fig. 11.T

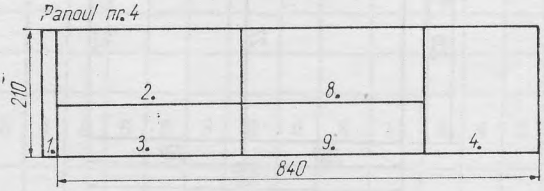


Fig. 12.T

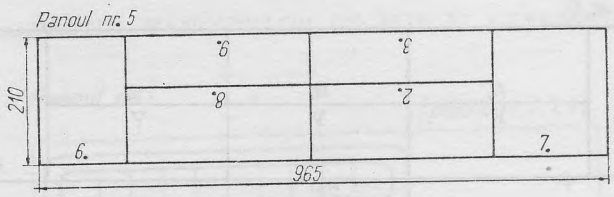


Fig. 13.T

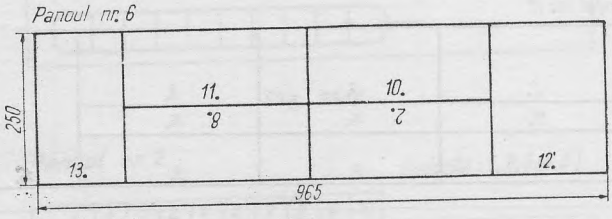


Fig. 14.T

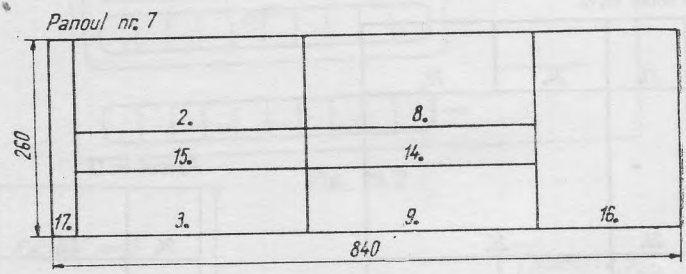


Fig. 15.T

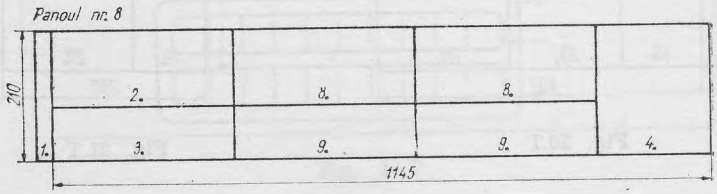


Fig. 16.T

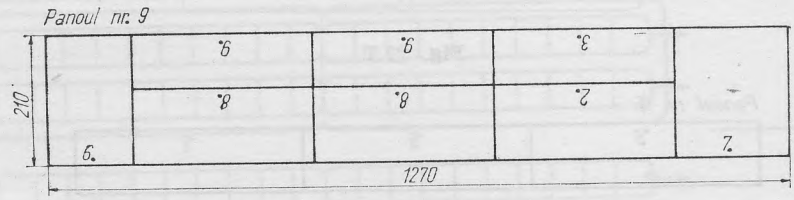


Fig. 17.T

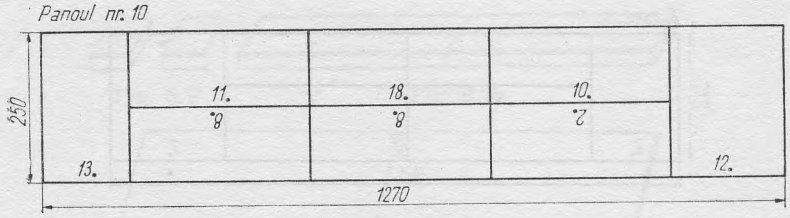


Fig. 18.T

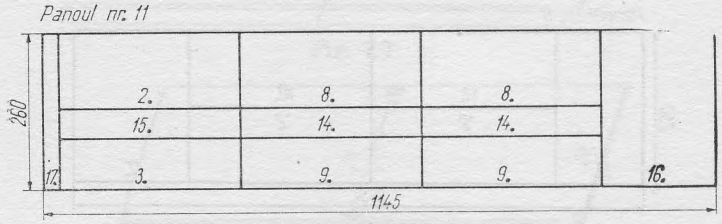


Fig. 19.T

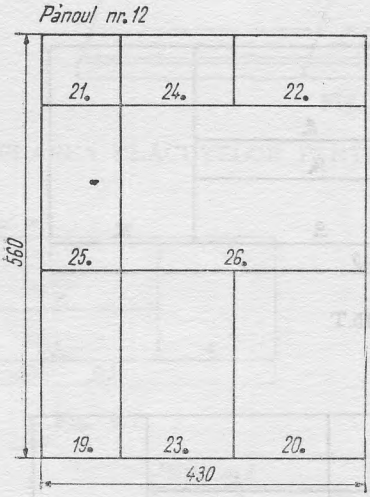


Fig. 20.T

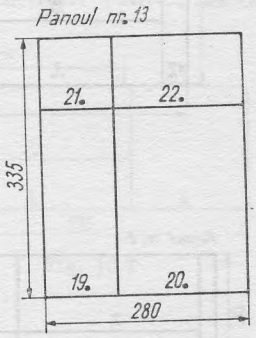


Fig. 21.T

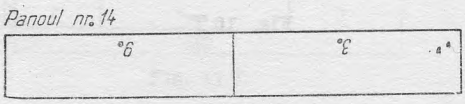


Fig. 22.T

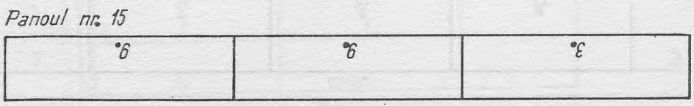


Fig. 23.T

Panoul nr.1 *(plăcile: 1, 2, 3, 4)*

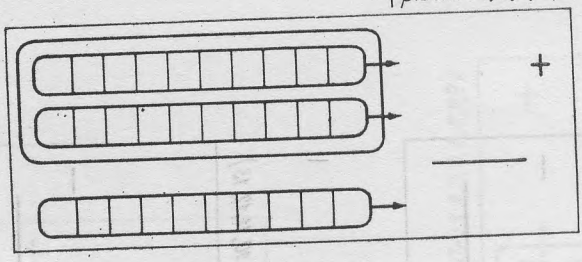


Fig. 24.T

Panoul nr. 2 *(plăcile: 1, 2, 3, 4, 5)*

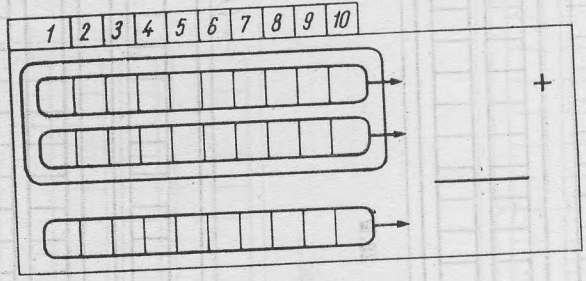


Fig. 25.T

Panoul nr. 3 *(plăcile: 2, 3, 6, 7)*

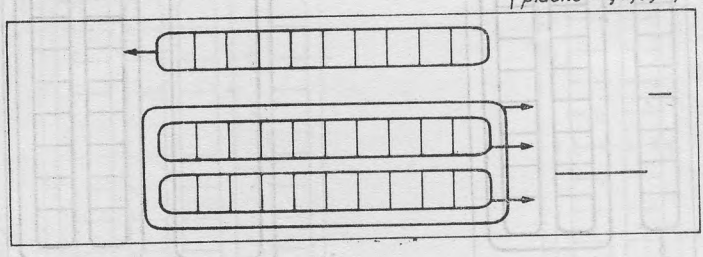


Fig. 26.T

Panoul nr. 4 *(plăcile: 1, 2, 3, 4, 8, 9)*

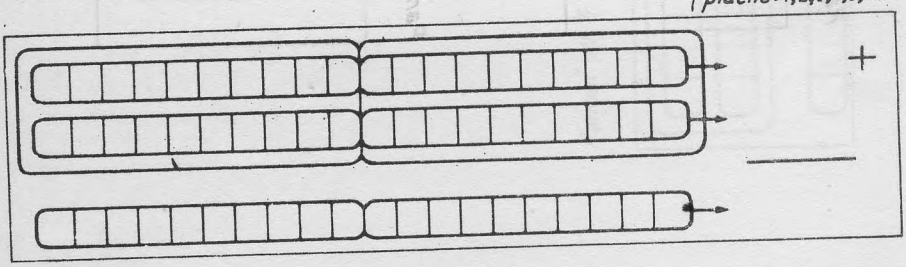


Fig. 27.T

Panoul nr. 5

(plăcile: 2,3,6,7,8,9)

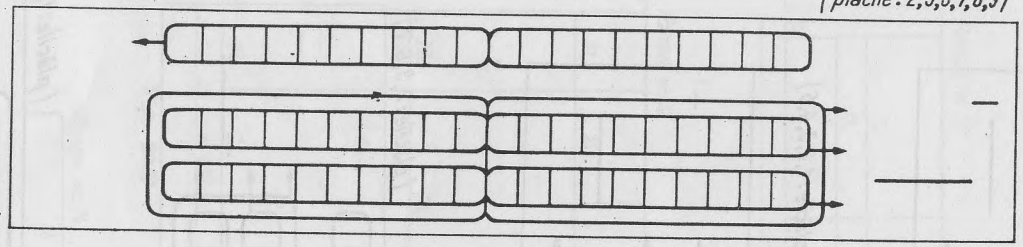


Fig. 28.V

Panoul nr. 6

(plăcile: 2,8,10,11,12,13)

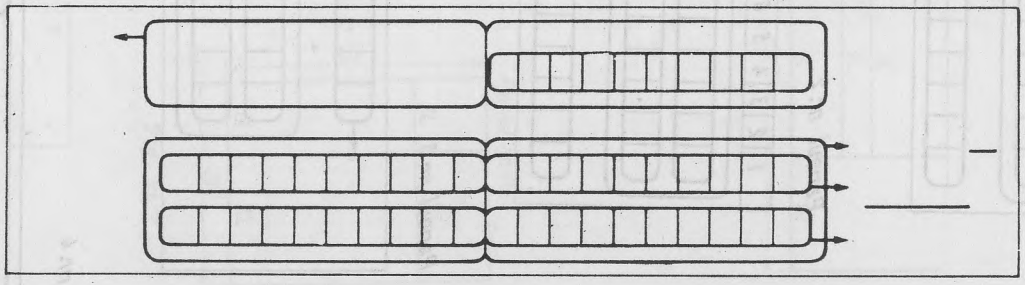


Fig. 29.T

Panoul nr. 7

(plăcile : 2, 3, 8, 9, 14, 15, 16, 17)

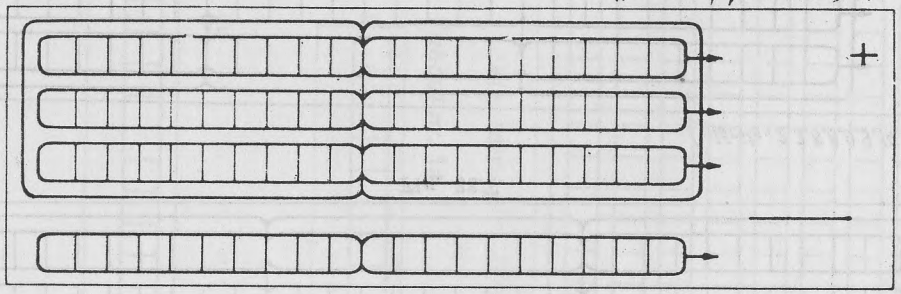


Fig. 30.T

Panoul nr. 8

(plăcile : 1, 2, 3, 4, 8, 8, 9, 9)

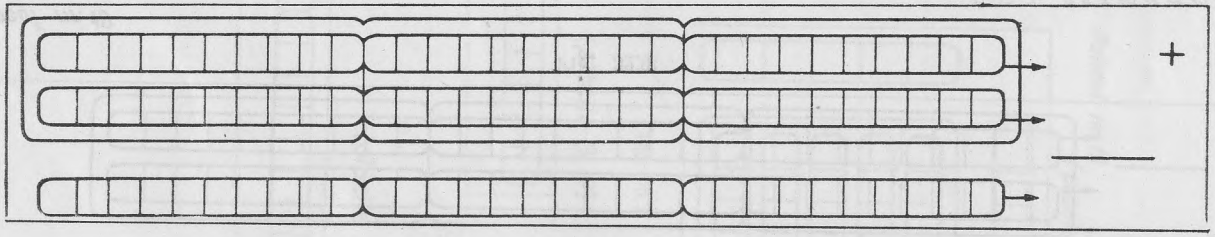


Fig. 31.T

Panoul nr. 9

(plăcile : 2,3,6,7,8,8,9,9)

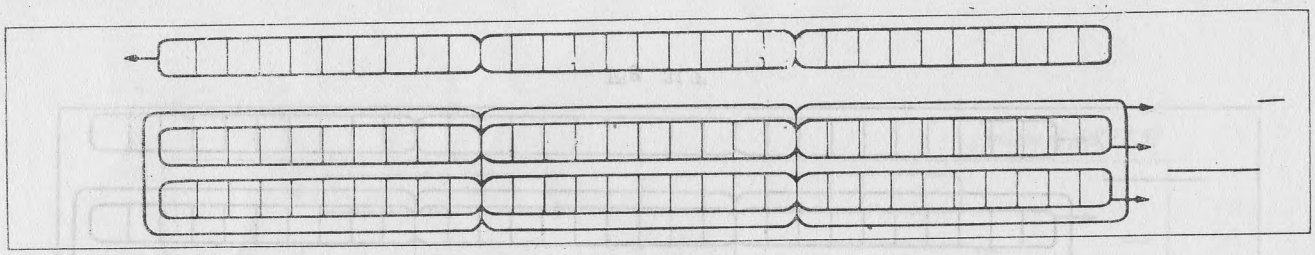


Fig. 32.T

Panoul nr. 10

(plăcile : 2,8,8,10,11,12,13,18)

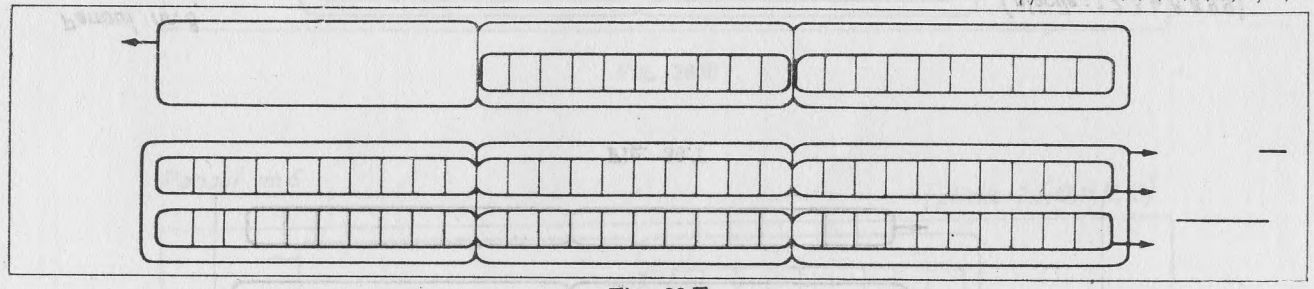


Fig. 33.T

Panoul nr. 11

(plăcile : 2,3,8,8,9,9,14,14,15,16,17)

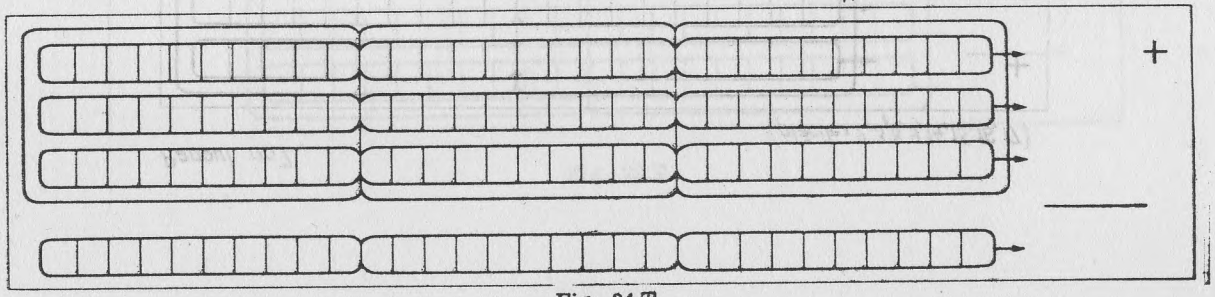


Fig. 34.T

Panoul nr. 12 (plăcile: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26)

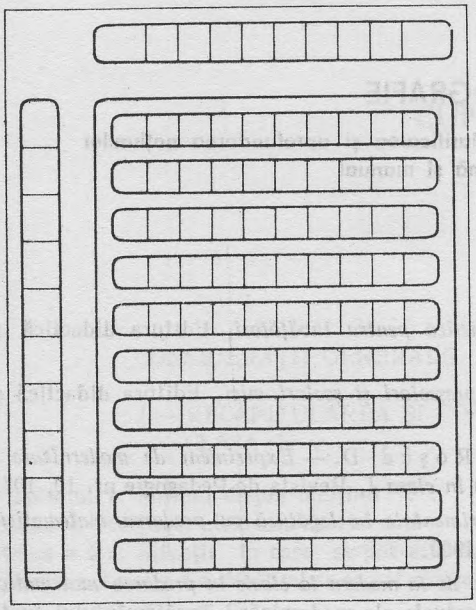


Fig. 35.T

Panoul nr. 13 (plăcile: 19, 20, 21, 22)

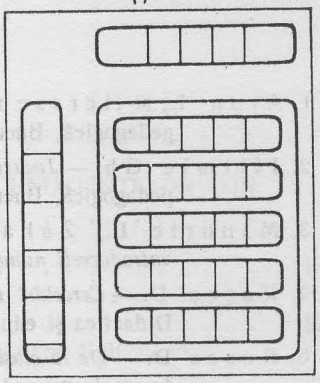


Fig. 36.T

Panoul nr. 14 (plăcile 3, 9)

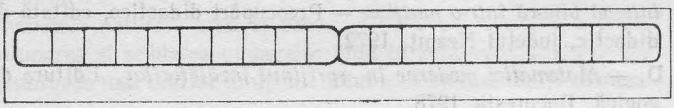


Fig. 37.T

Panoul nr. 15 (plăcile 3, 9, 9)

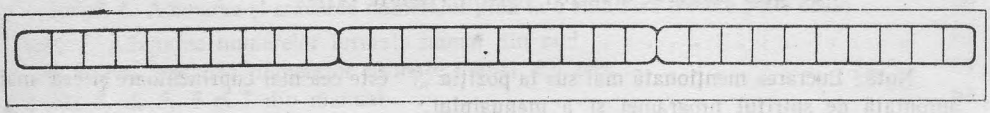


Fig. 38.T

BIBLIOGRAFIE

recomandată învățătorilor pentru clarificarea și aprofundarea noțiunilor din programă și manual

1. Aron I., și Herescu Gh. — *Aritmetică pentru învățători*, Editura didactică și pedagogică, București, 1977.
2. Iftimie Gh. — *Jocuri logice pentru preșcolari și școlari mici*, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
3. Mandric L., Zahareanu S., Roșca D. — *Experiment de modernizare a introducerii numerelor pînă la 10 în clasa I*, Revista de Pedagogie nr. 10, 1971.
4. Roșca D. — *Cercetări teoretice și experimentale în legătură cu predarea matematicii*. Didactica și educația, Craiova, 1969.
5. Roșca D. — *De la clasic la modern, sau de la modern la clasic în predarea matematicii în școala generală?* — Probleme actuale ale modernizării învățămîntului matematicii în țările europene, Colocviul internațional U.N.E.S.C.O., Buc. 1968 — — Editura didactică și pedagogică, București, 1970.
6. Roșca D. — *Introducerea și utilizarea la clasele III-IV a noțiunii generale de operație internă binară într-o mulțime* — Preocupări didactice, editată de Casa corpului didactic, județul Neamț, 1972.
7. Roca D. — *Matematici moderne în sprijinul învățătorilor*, Editura didactică și pedagogică, București, 1978.
8. Roșca D., Mandric L., Zahareanu S. — *Introducerea numerelor pînă la zece în clasa I pe baza unor elemente despre mulțimi și relații*, planurile lecțiilor prezentate în cadrul unui experiment didactic — Preocupări didactice, editată de Casa corpului didactic, județul Neamț, 1977.

*

Notă: Lucrarea menționată mai sus la poziția „7" este cea mai cuprinzătoare și cea mai apropiată de spiritul programei și a manualului.

CUPRINS

CONSIDERAȚII GENERALE 3

I — RECAPITULAREA ȘI COMPLETAREA CUNOȘTINȚELOR DIN CLASA I . . . . . .

Capitolul 1. **Noțiuni despre mulțimi** 13
Tema *1.* Mulțime, element, apartenență 15
Tema a *2*-**a.** Situații în care se pot afla două mulțimi 18
Temele a *3*-**a și a** *4*-**a.** Mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date. Mulțime vidă . . 23

Capitolul 2. **Numărul de elemente al mulțimii. Numerele pînă la zece** 28
Tema *1.* Corespondență element cu element între mulțimi 34
Tema a *2*-**a.** Numărul de elemente al mulțimii. Compararea mulțimilor după numărul de elemente 38
Tema a *3*-**a.** Numerele naturale pînă la zece. 40
Tema a *4*-**a.** Adunarea și scăderea numerelor pînă la zece 43
Tema a *5*-**a.** Reuniunea mai multor mulțimi. Adunarea cu mai mulți termeni 50

Capitolul 3. **Numerele naturale de la zece la o sută** 54
Tema *1.* Numirea și scrierea numerelor 57
Tema a *2*-**a.** Compararea numerelor pînă la o sută 59

Capitolul 4. **Adunarea și scăderea numerelor pînă la o sută fără trecere peste ordin** . . 60
Tema *1.* Adunarea numerelor formate numai din zeci 61
Tema a *2*-**a.** Scăderea numerelor formate numai din zeci 64
Temele *3*, *4*, *5*, *6* **și** *7* din manual 68

II — ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA O SUTĂ CU TRECERE PESTE ORDIN . . . . . .

Capitolul 1. **Adunarea și scăderea pînă la** *20* **cu trecere peste zece** 74
Temele *1*, *2* **și** *3* din manual 77
Tema a *4*-**a.** Adunarea cu trecere peste zece a două numere scrise cu cîte o cifră . . . 78
Tema a *5*-**a.** Scăderea cu trecere peste zece a unui număr scris cu o cifră, dintr-un număr cuprins între 10 și 20 83

Capitolul 2. **Adunarea și scăderea cu trecere peste ordin a numerelor naturale pînă la o sută** 88

Capitolul 3. **Adunarea mai multor numere naturale** 91

III — NOȚIUNI DE GEOMETRIE 93
IV — NUMERE NATURALE PÎNĂ LA O MIE. 94
Capitolul 1. **Numirea, scrierea și citirea** 94
Capitolul 2. **Adunarea și scăderea numerelor naturale pînă la o mie fără trecere peste ordin** 95
V — ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE DE LA ZERO LA ZECE 98
Capitolul 1. **Înmulțirea numerelor naturale folosind mulțimea produs** 98
Tema *1.* Pereche ordonată. Mulțimi factori, mulțime produs 100
Tema a *2*-**a.** Înmulțirea numerelor naturale cu ajutorul mulțimii produs 103
Tema a *3*-**a.** Comutativitatea înmulțirii 108
Capitolul 2. **Înmulțirea numerelor naturale folosind adunarea repetată** 109
Capitolul 3. **Tabla înmulțirii** 112
VI — ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE 114
Capitolul 1. **Împărțirea numerelor naturale folosind separarea de submulțimi disjuncte, fiecare avînd același număr de elemente** 114
Tema *1.* Exerciții și probleme pregătitoare 116
Tema a *2*-**a.** Împărțirea numerelor naturale cu ajutorul separării de submulțimi disjuncte, avînd același număr de elemente 122
Capitolul 2. **Împărțirea numerelor naturale prin scădere repetată**. 126
Capitolul 3. **Legătura dintre înmulțire și împărțire** 127
VII — UNITĂȚI DE MĂSURĂ 131
VIII — EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE 132
Trusa pentru predarea pe bază de mulțimi a operațiilor cu numere naturale la clasele I — IV 137
Bibliografie 166

Bun de tipar, mai 1980
Coli de tipar 10,50
Plan editură Nr. 26574

Tiparul executat sub cd. 406 la I. P. „Filaret", str. Fabrica de chibrituri nr. 9—11 București
Republica Socialistă România